

# Pendekatan Kartesian untuk Sistem Potensial Listrik Geometri Campuran Kartesian - Polar

Fitriana R. H dan M. Arief Bustomi

Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111

*e-mail:* a\_bustomi@physics.its.ac.id

**Abstrak** — Sistem potensial listrik dengan geometri campuran kartesian – polar dianalisa dengan menggunakan pendekatan kartesian. Untuk penelitian ini hanya dibatasi pada pengaruh jumlah titik data syarat batas pada pendekatan kartesian. Ada beberapa tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu melakukan perhitungan analitik dalam koordinat campuran kartesian – polar, menentukan syarat batas untuk pendekatan kartesian, menghitung potensial listrik dengan pendekatan kartesian pada masing – masing jumlah titik data syarat batas dan membandingkannya dengan hasil perhitungannya secara langsung. Berdasarkan penelitian ini semakin banyak jumlah titik data yang digunakan, maka selisih nilai potensial listrik antara pendekatan kartesian dan perhitungan langsung akan mendekati suatu nilai nilai tertentu. Dari penelitian ini juga diperoleh bahwa perhitungan pada pendekatan kartesian untuk sistem geometri campuran kartesian – polar ternyata diperoleh nilai yang berbeda dari nilai perhitungan langsungnya.

**Kata Kunci** — pendekatan kartesian, jumlah titik data, syarat batas, sistem geometri campuran kartesian - polar

## I. PENDAHULUAN

Sebagian besar persoalan fisika berkaitan dengan suatu persamaan differensial yang merupakan suatu representasi matematis dari hukum fisika untuk suatu persoalan fisika tersebut. Salah satu persamaan differensial yang sering dijumpai dalam fisika adalah persamaan Laplace. Penyelesaian suatu persamaan differensial dalam fisika harus memenuhi suatu syarat batas tertentu yang merupakan kondisi fisis dari sistem. Untuk menggambarkan kondisi dari sistem biasanya digunakan suatu sistem koordinat, misalnya sistem koordinat kartesian dan sistem koordinat polar. Penggunaan masing-masing sistem koordinat disesuaikan dengan bentuk geometri sistemnya [1- 6].

Permasalahannya adalah bagaimana jika suatu sistem tersebut mempunyai bentuk geometri campuran. Dalam penelitian ini, diteliti solusi persamaan Laplace berupa fungsi potensial listrik sistem dengan bentuk geometri campuran kartesian - polar dengan pendekatan perhitungan menggunakan koordinat kartesian. Dua penelitian sebelumnya telah diteliti pengaruh jumlah titik data syarat batas pada

pendekatan katesian untuk sistem potensial listrik geometri polar dan analisis menggunakan koordinat polar untuk sistem potensial listrik geometri campuran kartesian – polar. Kedua penelitian tersebut menentukan fungsi potensial syarat batas dan pengaruh jumlah suku Fourier pada pendekatan polar fungsi potensial listriknya [7-8]. Dalam penelitian ini, meneliti analisis menggunakan koordinat kartesian untuk sistem potensial listrik geometri campuran kartesian - polar .

## II. DASAR TEORI

### *Metode Separasi Variabel Koordinat Kartesian*

Metode Pemisahan Variabel dilakukan dengan memisahkan fungsi potensial listrik  $V(x,y) = X(x)Y(y)$ .

Substitusi ke persamaan Laplace  $\nabla^2 \{ = 0$ , kemudian dibagi dengan  $V(x,y)$  akan menghasilkan [4, 5] :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (1)$$

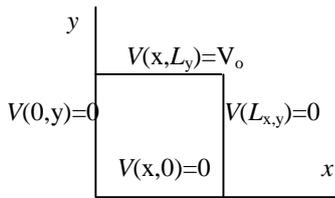
Karena persamaan ini harus sama dengan nol untuk semua nilai x dan y maka kedua sukunya bisa disamakan dengan konstanta, misalnya:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= k^2 \end{aligned} \quad (2)$$

dimana k adalah konstanta separasi variabel. Masing-masing persamaan di atas merupakan persamaan differensial biasa yang memiliki penyelesaian analitis :

$$\begin{aligned} X(x) &= C_s \sin(kx) + C_c \cos(kx) \\ Y(y) &= C_s' \sinh(ky) + C_c' \cosh(ky) \end{aligned} \quad (3)$$

dimana C dan C' adalah konstanta yang bisa dicari apabila syarat batas diberikan. Misalkan syarat batasnya adalah:



Gambar 1 : Syarat batas koordinat kartesian

$$V(x,y=0) = V(x=0,y) = V(x=L_x,y) = 0 ,$$

$$V(x,y=L_y)=V_o$$

(4)

Maka syarat ini hanya dipenuhi apabila  $C_c = 0$  dan  $C'_c = 0$ . Kemudian pada  $x = L_x$  akan terpenuhi apabila  $k = n / L_x$ . Oleh sebab itu, penyelesaian persamaan Laplace adalah superposisi:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{nf x}{L_x} \sinh \frac{nf y}{L_x} \quad (5)$$

Koefisien  $C_n$  dapat diperoleh dengan memasukkan nilai syarat batas pada  $y = L_y$ , yaitu  $V_o$  sehingga penyelesaian akhirnya adalah:

$$V(x, y) = V_o \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} C_n \frac{h}{nf} \sin \frac{nf x}{L_x} \sinh(nfy / L_x) / \sinh \frac{nf y}{L_x} \quad (6)$$

**Metode Separasi Variabel Koordinat Silinder**

Persamaan Laplace dalam koordinat silinder yang hanya merupakan fungsi dari dua variable dalam koordinat silinder, yaitu  $\rho$  dan  $W$  adalah [4, 5] :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial W^2} = 0 \quad (7)$$

Metode separasi variabel digunakan untuk menyelesaikan potensial dalam koordinat silinder, yaitu  $\Phi$  merupakan hasil kali dari dua fungsi  $\Phi = R(\rho)Y(W)$ . Substitusi ke persamaan (7) akan menghasilkan:

$$\frac{R}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dW^2} \quad (8)$$

Kedua ruas dari persaman (8) akan disamakan dengan  $K^2$ , dimana  $K$  merupakan konstanta separasi variabel.

$$\frac{d^2 Y}{dW^2} + K^2 Y = 0 \quad (9)$$

Persamaan (9) Mempunyai solusi  $\cos(KW)$  dan  $\sin(KW)$ . Besaran dari  $K$  harus dibatasi dalam orde tertentu untuk membuat solusi ini mempunyai nilai fungsi tunggal dari  $W$ .

Atau dengan kata lain, solusi untuk membuat pengertian fisiknya seharusnya sama setelah diputar  $2f$ , yaitu :

$$\cos K(W + 2f) = \cos (KW)$$

$$\sin K(W + 2f) = \sin (KW) \quad (10)$$

dimana menghendaki bahwa  $K = n$ , dan  $n$  adalah nol atau suatu bilangan positif. Suatu sifat penting dari solusi ini adalah kenyataan bahwa  $\sin$  dan  $\cos$  orthogonal:

$$\int_0^{2f} \cos(mW) \cos(nW) dW = \int_0^{2f} \sin(mW) \sin(nW) dW = f U_{mn}$$

$$\int_0^{2f} \cos(mW) \cos(nW) dW = 0 \quad (11)$$

dimana  $U_{mn}$  adalah delta kronecker. Kebergantungan radial dari potensial dapat diperoleh dengan pengaturan sisi sebelah kiri persamaan (8) dan dengan menyamakan  $K^2 = n^2$  didapatkan :

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{n^2 R}{\rho} = 0 \quad (12)$$

Untuk  $n = 0$ , potensial memenuhi persamaan dimana potensial listriknya tidak mempunyai kebergantungan angular, yaitu:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) = 0 \quad (13)$$

dengan solusi  $R(\rho) = \text{konstan}$  dan  $R(\rho) = \ln \rho$ . Untuk  $n \neq 0$  persamaan memiliki dua solusi  $\rho^n$  dan  $\rho^{-n}$ . Oleh karena itu, solusi yang paling umum adalah

$$\Phi(\rho, W) = A_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n (\rho^n + \rho^{-n}) \cos nW + B_n (\rho^n + \rho^{-n}) \sin nW]$$

$$\Phi(\rho, W) = A_0 + A_0' \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nW + B_n \sin nW] \rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n' \cos nW + B_n' \sin nW] \rho^{-n} \quad (14)$$

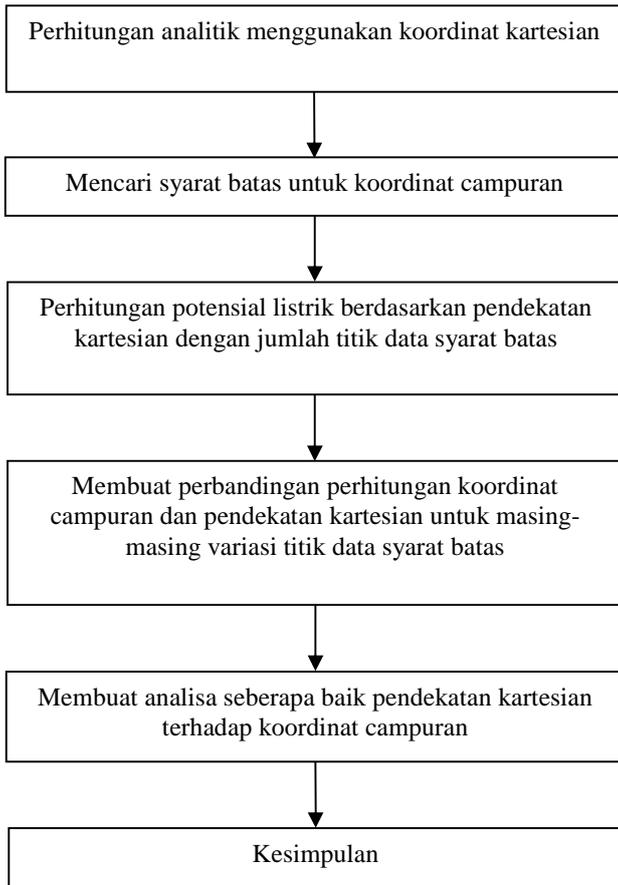
dimana  $A_n, A_n', B_n, B_n'$  untuk  $n \geq 0$ , adalah konstanta untuk nilai dari syarat batas. Penghitungan koefisien  $A_n$  dan  $B_n$  dilakukan dengan menggunakan integrasi secara numerik [5, 6].

$$A_n = \frac{1}{f r^n} \int_0^f V(r) \cos n_r d_r \tag{15}$$

$$B_n = \frac{1}{f r^n} \int_0^f V(r) \sin n_r d_r$$

III. METODOLOGI

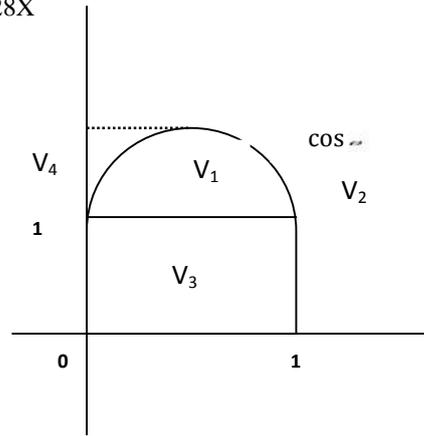
Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini digambarkan dalam diagram alir berikut :



Gambar 2 : Diagram alir penelitian

IV. ANALISA DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini diteliti sistem dua dimensi yaitu campuran kartesian - polar dengan syarat batas potensial listrik pada keempat sisi-sisinya masing-masing :  $V_1 = \cos \theta$ ,  $V_2 = 1$ ,  $V_3 = 0$ , dan  $V_4 = -1$  seperti diperlihatkan pada Gambar 3.



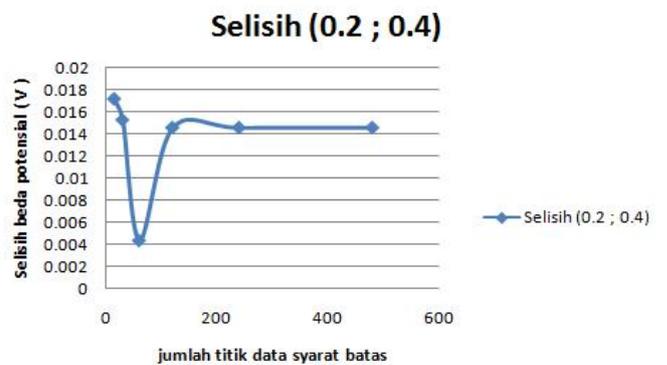
Gambar 3 : Syarat batas sistem yang diteliti

Langkah penelitian pertama adalah perumusan potensial listrik dalam koordinat campuran dengan syarat batas seperti diperlihatkan pada Gambar 3. Adapun solusi untuk menghitung system potensial listrik diatas adalah

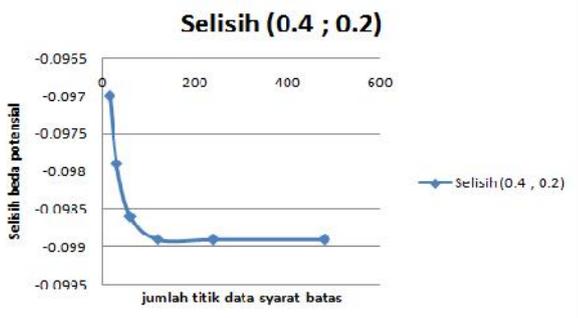
$$\phi_{total} = \phi_{polar} + \phi_{katesian\ kanan} + \phi_{katesian\ kiri}$$

Langkah kedua adalah perumusan potensial listrik berdasarkan syarat batas pendekatan kartesian. Dalam penelitian ini digunakan 6 variasi titik data syarat batas yaitu 15,30,60,120,240, dan 480. Untuk setiap sisi kartesiannya syarat batas akan diperoleh fungsi potensial syarat batas  $V(x, y)$  yang akan digunakan untuk menentukan nilai  $\gamma_n$  dimana hanya dibatasi sampai pendekatan 10 suku fourier dengan menggunakan Pers. (5 dan 6). Pada masing – masing 6 titik data tersebut kemudian dibandingkan dengan perhitungan potensial listrik langsung. Secara keseluruhan dapat dikumpulkan selisih rata – rata antara perhitungan secara pendekatan dengan perhitungan secara langsung. Adapun nilainya untuk masing- masing yaitu 0,1296, 0,1071 , 0,1078 , 0,1109 , 0,1107 , 0,1106. Hal ini menunjukkan semakin banyak titik data yang digunakan maka selisih nilai potensial pendekatan dengan nilai potensial perhitungan secara langsung akan mendekati suatu nilai tertentu.

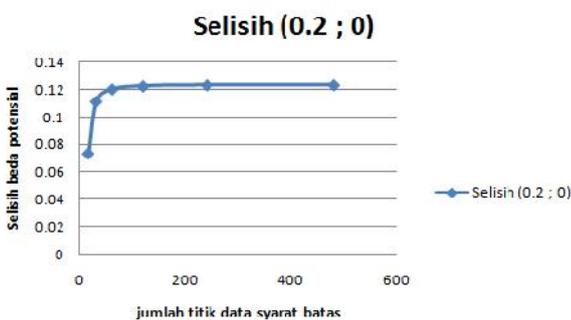
Dari nilai selisih didapat digunakan untuk membuat grafik untuk mengetahui hubungan penambahan jumlah titik data terhadap kekonvergenitas nilai potensial. Untuk menyederhanakan hanya dibuat beberapa grafik pada titik tertentu. Adapun titik datanya yaitu (0,2 ; 0,4), (0,4 ; 0,2), (0,2 ;0), (0 ; 0,2)



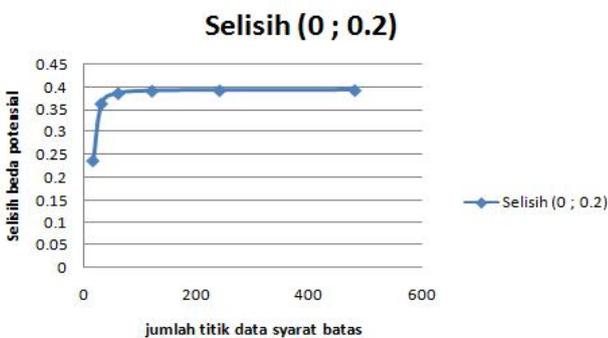
Gambar 4 : Grafik jumlah titik data syarat batas dan selisih potensial listrik untuk titik (0,2 ; 0,4)



Gambar 5 : Grafik jumlah titik data syarat batas dan selisih potensial listrik untuk titik (0,4 ; 0,2)



Gambar 6 : Grafik jumlah titik data syarat batas dan selisih potensial listrik untuk titik (0,2 ; 0)



Gambar 7 : Grafik jumlah titik data syarat batas dan selisih potensial listrik untuk titik (0 ; 0,2)

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kushidayati, I. A., M. A. Bustomi, "Analisa Potensial Listrik menggunakan Koordinat Polar untuk Sistem Geometri Kartesian", Skripsi S1 Jur. Fisika FMIPA ITS, Surabaya, 2009.
- [2] Bustomi, M. A., I. A. Kushidayati, "Pendekatan Polar untuk Potensial Listrik Sistem Geometri Kartesian", Prosiding Simposium Fisika Nasional ke-23, Surabaya, 2010.
- [3] Islamiyah, I., M. A. Bustomi, "Pengaruh Jumlah Suku Fourier pada Pendekatan Polar untuk Sistem Geometri Kartesian", Skripsi S1 Jur. Fisika FMIPA ITS, Surabaya, 2010.
- [4] Lavery, J. E., "Shape-Preserving, Multiscale Interpolation by Univariate Curvature-based Cubic L1 Splines in Cartesian and Polar Coordinates", Computer Aided Geometric Design 19: 257-273, 2002.
- [5] Al-Khaled, K., "Numerical Solutions of The Laplace's Equation", Applied Mathematics and Computation 170 : 1271-1283, 2005
- [6] Andrews, M., "Alternative Separation of Laplace's Equation in Toroidal Coordinates and its Application to Electrostatics ", Journal of Electrostatics 64: 664-672, 2006.
- [7] M, Najik, 2012, "Pengaruh Jumlah Titik Data Potensial Listrik Sistem Geometri Campuran Kartesian – Polar Menggunakan Pendekatan Polar", Skripsi S1 Jur. Fisika FMIPA ITS, Surabaya.
- [8] Wahyudi, Agustina. T, 2012, "Pengaruh Jumlah Titik Data Syarat Batas Pada Pendekatan Kartesian Untuk Sistem Potensial Listrik Geometri Polar", Skripsi S1 Jur. Fisika FMIPA ITS, Surabaya.

V. KESIMPULAN

Beberapa hal yang dapat disimpul-kan dari penelitian ini adalah :

1. Semakin banyak jumlah titik data syarat batas yang digunakan maka selisih nilai potensial listrik antara nilai pendekatan dan nilai potensial langsung akan mendekati suatu nilai tertentu
2. Berdasarkan pada perhitungan pendekatan kartesian untuk sistem geometri campuran kartesian – polar akan didapatkan nilai yang berbeda dari nilai perhitungan potensial langsung