

Karakteristik Aliran Panas dalam Logam Penghantar Listrik

Mudmainnah Farah Dita, dan Basuki Widodo

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia

e-mail: b_widodo@matematika.its.ac.id

Abstrak—Aplikasi matematika banyak sekali dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah analisa aliran panas yang terjadi pada logam penghantar listrik. Dalam tugas akhir ini membahas mengenai karakteristik aliran panas dalam logam penghantar listrik. Mulai dengan analisa persamaan aliran panas, penyelesaian dengan transformasi Laplace, simulasi dengan MATLAB dan visualisasinya dengan Surfer. Sehingga diperoleh berbagai macam karakteristik logam penghantar listrik yang mempengaruhi perubahan panas dalam penghantar listrik. Dari hasil tugas akhir ini, dapat disimpulkan bahwa logam tembaga cukup baik untuk dijadikan sebagai logam penghantar listrik karena sifatnya yang tidak menghasilkan panas terlalu besar namun memiliki daya hantar listrik yang cukup besar.

Kata Kunci—aliran panas, penghantar listrik, simulasi, transformasi Laplace, visualisasi.

I. PENDAHULUAN

MATEMATIKA artikel merupakan salah satu disiplin ilmu yang mempunyai banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Aplikasi matematika selanjutnya disebut sebagai matematika terapan. Dalam bidang matematika terapan banyak teori-teori matematika yang dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah transformasi Laplace yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial[2].

Persamaan diferensial parsial merupakan salah satu cabang matematika yang sangat penting dalam riset matematika modern. Banyak sekali aplikasi penting tentang persamaan ini, diantaranya dalam ilmu fisika dan ilmu teknik. Salah satu persamaan yang termasuk didalam persamaan diferensial parsial adalah persamaan aliran panas.

Oleh karena itu muncullah ide untuk membahas model persamaan aliran panas dalam logam penghantar listrik yang selanjutnya diselesaikan menggunakan transformasi Laplace untuk mendapatkan karakteristik aliran panas dari logam penghantar listrik.

II. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah untuk memperoleh karakteristik aliran

panas dalam logam penghantar listrik dapat dilihat pada diagram alur konseptual penelitian (Gambar 1).

A. Analisa Model Aliran Panas

Analisis yang dilakukan adalah dengan memodelkan aliran panas yang terjadi dalam penghantar listrik sehingga akan diperoleh persamaan aliran panas dalam penghantar listrik ini dalam bentuk umum. Untuk memodelkan aliran panas ini dibutuhkan informasi/pengetahuan yang berkenaan dengan persamaan dasar aliran panas, batasan suhu, inisial suhu, dan karakteristik dari bahan konduktornya.

B. Transformasi Laplace

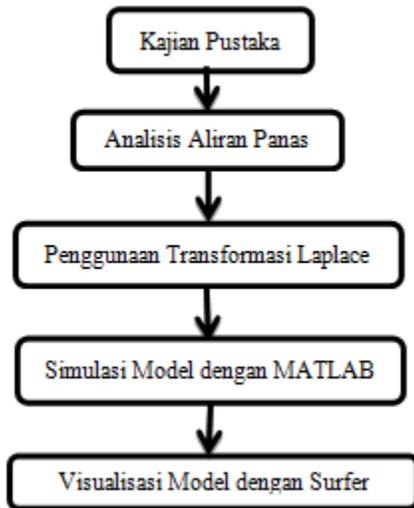
Bentuk umum aliran panas yang diperoleh dari analisis aliran panas selanjutnya diselesaikan menggunakan transformasi Laplace. Transformasi Laplace ini akan mengubah persamaan diferensial parsial dan nilai batas kedalam suatu persamaan diferensial biasa dan nilai batas yang baru dalam peubah x . Persamaan diferensial biasa yang diperoleh diselesaikan dan dengan memanfaatkan nilai batas yang baru diperoleh suatu solusinya. Selanjutnya, solusi masalah persamaan diferensial parsial semula dapat dicari dengan invers transformasi Laplace dari persamaan diferensial biasa tersebut. Untuk mempermudah dalam mencari hasil invers dari selesai antransformasi Laplace, dapat digunakan Tabel transformasi Laplace.

C. Simulasi dengan Software MatLab

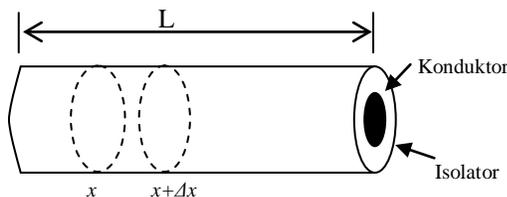
Setelah diperoleh bentuk aljabar dari transformasi Laplace, selanjutnya dibuatkan program computer dengan menggunakan *software* MATLAB versi 7.7.0. Dengan simulasi menggunakan *software* ini, diharapkan mampu memberikan penyelesaian untuk kasus sejenis namun dengan nilai batasan atau karakteristik yang berbeda-beda.

D. Visualisasi Pola Aliran Panas

Hasil dari simulasi dengan *software* MATLAB selanjutnya divisualisasikan dengan *software* Surfer. Hasil visualisasi ini nantinya akan menghasilkan informasi pola aliran panas dalam logam penghantar listrik. Hal ini dapat memberikan informasi yang lebih rinci mengenai karakteristik dari suatu penghantar listrik.



Gambar 1. Gambar Alur Konseptual Penelitian



Gambar 2. Penampang Konduktor Listrik

III. PEMBAHASAN

A. Analisa Model Persamaan Aliran Panas

Suatu konduktor penghantar listrik umumnya dilapisi oleh suatu bahan isolator listrik. Isolator listrik ini dapat menghentikan pelepasan panas akibat dari adanya aliran listrik. Telah diketahui bahwa suatu kawat penghantar listrik dapat menjadi panas setelah mengantarkan arus listrik. Selanjutnya akan dianalisis model dari hilangnya panas pada penghantar listrik setelah sumber listrik dihentikan alirannya. Dikonstruksikan sebuah model aliran panas sederhana dari suatu penghantar listrik dengan panjang L dapat dilihat pada Gambar 2.

Panas akan mengalir searah dengan kenaikan suhu. Rata-rata aliran panas sebanding dengan gradien suhu. Dalam persamaan satu dimensi dapat didefinisikan rata-rata aliran panas sebagai berikut :

$$\text{Rata-rata aliran panas} = -KA \frac{du}{dx} \tag{1}$$

dengan :

u = suhu

K = konduktivitas termal logam

A = luas penampang logam penghantar listrik

Karena kawat penghantar listrik dilapisi isolator maka panas hanya mengalir searah sumbu- x dan konservasi panas terjadi pada segmen kawat $[x, x + \Delta x]$.

Sehingga untuk masing-masing segmen diperoleh :

Rata-rata aliran panas yang mengalir dibagian belakang dirumuskan dengan $-KA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

Rata-rata aliran panas yang mengalir dibagian depan didefinisikan dengan $-KA \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$

dan total panas yang mengalir pada segmen ini adalah :

$$\Delta \text{heatflux} = -KA \left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \tag{2}$$

Total kuantitas panas dari elemen ini adalah $\sigma \rho \Delta x A u$, dengan σ = kalor jenis dan ρ = massa jenis. Sehingga diperoleh :

$$\Delta \text{heatenergy} = \sigma \rho \Delta x A \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3}$$

Berdasarkan hukum kekekalan energi, bahwa energi tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan, maka jumlah energi yang masuk dan keluar pada aliran listrik adalah sama, sehingga perubahan energi panas pada elemen tersebut adalah 0.

Dapat dituliskan :

$$\Delta \text{heatenergy} + \Delta \text{heatflux} = 0$$

Sehingga diperoleh :

$$\Delta \text{heat energy} = -\Delta \text{heat flux}$$

Substitusikan persamaan (2) dan (3) maka dapat dituliskan :

$$\sigma \rho \Delta x A \frac{\partial u}{\partial t} = KA \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$$

sehingga dapat dituliskan :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\sigma \rho} \frac{\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}}{\Delta x}$$

Jika diambil $\Delta x \rightarrow 0$, maka diperoleh persamaan panas satu dimensi sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{K}{\sigma \rho} \frac{\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}}{\Delta x}$$

Sehingga,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\sigma \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Bentuk $K/\sigma \rho$ disebut sebagai difusifitas dan sering dituliskan sebagai α^2 . Sehingga persamaan panas dalam satu dimensi dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

Dengan $\alpha^2 = K/\sigma \rho$.

B. Penyelesaian Persamaan Aliran Panas

Bentuk umum persamaan panas satu dimensi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ekivalen dengan bentuk :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < L \tag{5}$$

dengan syarat awal $u(x, 0) = u_0(x)$ dan syarat batas $u(0, t) = u_1(t)$ dan $u(L, t) = u_2(t)$.

Misalkan transformasi Laplace untuk $u(x, t)$ terhadap variabel t diberikan oleh :

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt \tag{6}$$

maka dapat diperoleh :

$$[u_{xx}(x, t)] = U_{xx}(x, s) = \int_0^\infty u_{xx}(x, t) e^{-st} dt \tag{7}$$

Tabel 1.
Tabel karakteristik logam penghantar listrik

Jenis Logam	Konduktivitas Termal (K)W/M°C	Massa Jenis (ρ) Kg/m ³	Kalor Jenis(σ) J/Kg°C	$\alpha^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$
Perak (murni)	410	10.500	230	0,00017
Tembaga (murni)	385	8920	390	0,000111
Aluminium (murni)	202	2.700	900	8,31E-05
Besi (murni)	73	7.900	450	2,05E-05
Emas	318	19.300	126	0,000131

Sedangkan untuk $\mathcal{L}[u_t(x, t)]$ diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\mathcal{L}[u_t(x, t)] = U_t(x, s) = \int_0^\infty u_t(x, t)e^{-st} dt \quad (8)$$

Persamaan (8) dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan integral parsial dengan pemisalan sebagai berikut :

Misalkan $u = e^{-st}$ maka $du = -s \cdot e^{-st} dt$ dan $dv = u_t(x, t) dt$ sehingga dengan mengintegrasikan kedua ruasnya diperoleh $v = u(x, t)$. Substitusikan ke persamaan (8) diperoleh :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_t(x, t)] &= U_t(x, s) = \int_0^\infty u_t(x, t)e^{-st} dt \\ U_t(x, s) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[e^{-st} \cdot u(x, t) - \int_0^a u(x, t)(-s \cdot e^{-st}) dt \right] \\ U_t(x, s) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[e^{-sa} \cdot u(x, a) - e^0 \cdot u(x, 0) \right. \\ &\quad \left. + s \int_0^a u(x, t) \cdot e^{-st} dt \right] \end{aligned}$$

$$U_t(x, s) = -u(x, 0) + sU(x, s) = -U_0(x) + sU(x, s) \quad (9)$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan aliran panas dengan menggunakan transformasi Laplace, kedua ruas persamaan (4) ditransformasikan sehingga diperoleh bentuk :

$$\mathcal{L}[u_t(x, t)] = \alpha^2 \mathcal{L}[u_{xx}(x, t)]$$

Substitusikan persamaan (7) dan persamaan (9) diperoleh :

$$-U_0(x) + sU(x, s) = \alpha^2 U_{xx}(x, s) \quad (10)$$

Sehingga persamaan (10) dapat disederhanakan sebagai berikut :

$$u_{xx}(x, s) - \frac{s}{\alpha^2} U(x, s) = -\frac{1}{\alpha^2} U_0(x) \quad (11)$$

dengan kondisi batas $U(0, s) = U_1(s)$, $U(L, s) = U_2(s)$. Setelah menyelesaikan syarat batas, $u(x, t)$ dapat diperoleh dengan menghitung invers transformasi Laplace $U(x, s)$. Persamaan (4.2.7) inilah yang merupakan penyelesaian umum untuk persamaan panas dengan menggunakan transformasi Laplace.

Salah satu contoh penggunaan penyelesaian persamaan panas untuk transformasi Laplace, dapat dilihat pada contoh berikut :

Misalkan pada saat temperatur awalnya nol, $u(x, 0) = 0$ dan syarat awal $u(0, t) = f(t)$ maka persamaan panas dimensi satu dapat diubah menjadi :

$$U_{xx}(x, s) - q^2 U(x, s) = 0 \quad (12)$$

dengan $q^2 = s/\alpha^2$ dan kondisi batas $U(0, s) = F(s)$ solusi yang mensyaratkan agar solusi terbatas untuk $x \rightarrow \infty$ dipenuhi oleh :

$$U(x, s) = F(s)e^{-qx} \quad (13)$$

Bentuk dari $f(t)$ ini sendiri dapat diberikan dalam bentuk konstan C atau dalam bentuk fungsi $f(t)$ secara umum. Untuk $f(t) = C$ penyelesaiannya diperoleh sebagai berikut :

$$U(x, s) = C \cdot e^{-qx}$$

Sehingga dari tabel transformasi Laplace yang diberikan diperoleh [3]:

$$u(x, t) = C \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}} \right)$$

dengan $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$ dengan $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy$ fungsierfc(u) dan erf(u) secara berturut-turut merupakan *complementary error function* dan *error function*. Sedangkan untuk sembarang syarat awal $f(t)$ solusinya diberikan sebagai berikut :

$$f(t) = f(t)$$

Transformasi Laplace persamaan tersebut adalah sebagai berikut :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

sehingga dengan substitusi ke persamaan (13) diperoleh :

$$U(x, s) = F(s) \cdot e^{-qx}$$

Dari tabel transformasi Laplace yang diberikan untuk persamaan tersebut diperoleh :

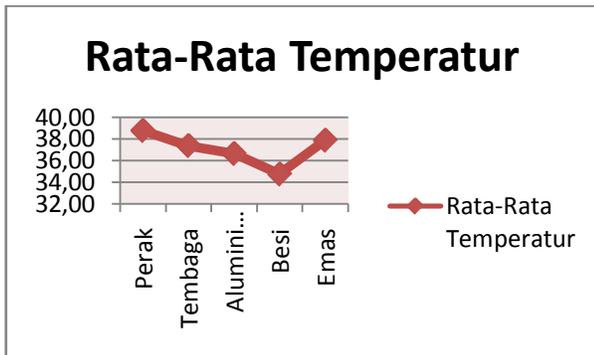
$$u(x, t) = \frac{x}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t) \frac{e^{-x^2/4\alpha^2(t-y)}}{(t-y)^{3/2}} dy$$

C. Simulasi Model Aliran Panas

Simulasi model aliran panas dilakukan dengan menggunakan bantuan software MATLAB versi 7.7.0. Simulasi dilakukan untuk mendapatkan nilai temperatur U sepanjang x dalam selang waktu t . Hal ini dilakukan dengan menyelesaikan persamaan aliran panas dimensi satu yang sudah diperoleh pada analisis aliran panas sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan kondisi batas diberikan oleh : $U(0, t) = 120^\circ$, $U(1, t) = 120^\circ$ dan $U(x, 0) = 25^\circ$. Kondisi batas yang diberikan tersebut, merupakan kondisi Dirichlet dengan asumsi bahwa masing-masing ujung logam penghantar listrik dalam keadaan panas sedangkan tengah-tengah dari logam penghantar listrik dipertahankan dalam keadaan suhu kamar. Selanjutnya akan dihitung bagaimana pola aliran panas yang akan terjadi pada logam penghantar listrik tersebut secara keseluruhan. Dengan $\alpha^2 = \frac{k}{\sigma\rho}$ yang selanjutnya disebut diffusivitas logam maka untuk setiap logam penghantar listrik maka diperoleh data yang dapat dilihat pada Tabel 1.



Gambar 3. Grafik Temperatur Rata-Rata Logam Penghantar Listrik

Dari hasil seluruh simulasi jenis-jenis logam penghantar listrik yang diberikan, diperoleh nilai temperatur(suhu) yang dicapai oleh masing-masing logam dengan memberikan perlakuan atau batasan yang sama dapat dilihat pada Gambar 3.

D. Visualisasi Pola Aliran Panas

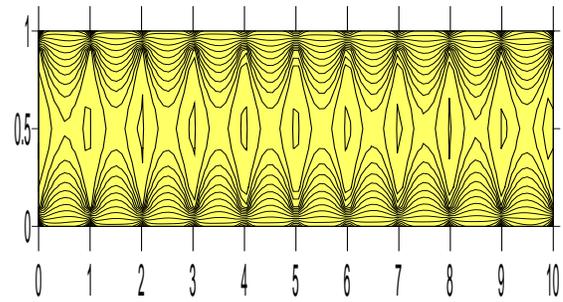
Visualisasi yang dikerjakan dengan menggunakan program surfer menunjukkan countur dari aliran panas yang mengalir sepanjang x dalam satuan waktu. Dari countur yang diperoleh dapat mempermudah pembacaan hasil simulasi dari persamaan aliran panas yang telah dikerjakan dengan menggunakan MATLAB. Untuk sumbu horisontal mewakili nilai waktu *t* dan sumbu vertikal menunjukkan nilai dari panjang *x*. Berikut adalah hasil visualisasi untuk masing-masing logam penghantar listrik yang diberikan (Gambar 4-8).

Dari hasil visualisasi, tampak gambar penyebaran aliran panas yang dihasilkan logam penghantar listrik. Panas yang mengalir terjadi di ujung-ujung tepi logam penghantar listrik dilanjutkan ke arah tengah dari logam penghantar listrik. Selanjutnya panas terus menyebar seiring berjalannya waktu menyebabkan panas merata pada logam.

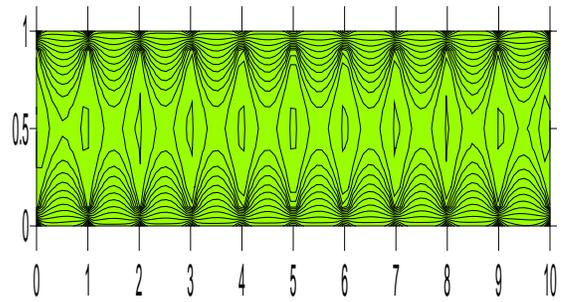
Penyebaran panas yang terjadi pada logam penghantar listrik ini berbeda-beda tergantung pada karakteristik masing-masing logam penghantar listriknya. Namun dari hasil yang diperoleh dari kelima jenis logam yang dianalisa, penyebaran panas yang terjadi hampir sama. Dimana masing-masing logam penghantar listrik menghantar panas sepanjang segmen tertentu dan pada waktu tertentu pula.

Perbedaan yang terjadi cukup signifikan adalah pada saat $t = 8s$. Hasil visualisasi yang diberikan pada logam besi menunjukkan bahwa besi pada saat $t = 8s$ penyebaran panas pada besi hanya terjadi hingga segmen 0,15m dari ujung-ujung logam penghantar listrik. Karena untuk segmen yang melebihi jarak ini, suhu yang dicapai oleh besi cenderung konstan atau tidak terjadi perubahan kenaikan suhu.

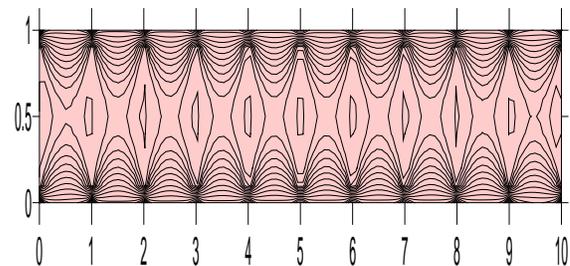
Hal ini diperkuat dengan hasil suhu rata-rata yang diperoleh dari kelima jenis logam tersebut. Besi menghasilkan suhu rata-rata paling rendah diantara kelima jenis logam. Sehingga besi menghasilkan panas lebih kecil dari logam yang lain karena suhu yang dihasilkanpun kecil. Namun, besi tidak baik untuk digunakan sebagai logam penghantar listrik karena besi mempunyai daya hantar yang cukup rendah



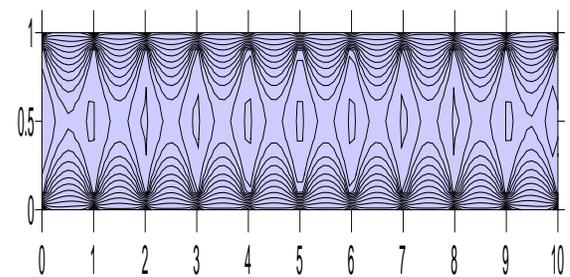
Gambar 4. Visualisasi Perak



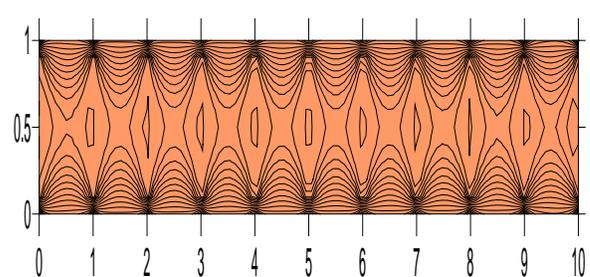
Gambar 5. Visualisasi Tembaga



Gambar 6. Visualisasi Aluminium



Gambar 7. Visualisasi Besi



Gambar 8. Visualisasi Emas

IV. KESIMPULAN

1. Aliran panas pada logam penghantar listrik merupakan persamaan dimensi panas pada satu dimensi yaitu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{dengan } \alpha^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

2. Penyelesaian persamaan panas dengan transformasi Laplace secara umum diberikan oleh :

$$u(x, t) = \frac{x}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t-y) \frac{e^{-x^2/4\alpha^2(t-y)}}{(t-y)^{3/2}} dy$$

dengan $f(t)$ adalah kondisi batas yang diberikan.

3. Aliran Panas dalam logam penghantar listrik disebabkan oleh faktor-faktor karakteristik masing-masing jenis logam seperti, massa jenis, kalor jenis dan konduktivitas termal logam.
4. Logam penghantar listrik yang baik adalah logam penghantar yang mampu menghantarkan listrik lebih baik, serta tidak menimbulkan panas yang besar sehingga dapat menyebabkan penggunaan logam sebagai penghantar listrik lebih awet dan tahan lama.

Berdasarkan hasil simulasi dan visualisasi yang dilakukan maka logam penghantar listrik yang terbaik diberikan oleh logam tembaga sebagai penghantar listrik karena dengan nilai konduktivitasnya yang tinggi dan suhu yang diperoleh juga cenderung lebih kecil daripada logam lain yang mempunyai konduktivitas yang tinggi juga.

SARAN

1. Keterbatasan yang diberikan pada batasan masalah dapat dikembangkan untuk penelitian selanjutnya.
2. Penggunaan program surfer sangat terbatas dalam menunjukkan aliran panas, sehingga untuk selanjutnya diharapkan dapat digunakan program lain yang dapat memberikan visualisasi yang lebih baik.

UCAPAN TERIMA KASIH

Alhamdulillah, segala puji syukur bagi Allah SWT karena berkat rahmat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan jurnal tugas akhir ini. Tak lupa penulis mengucapkan terima kasih pada pihak-pihak yang telah membantu dan mendukung dalam penulisan jurnal tugas akhir ini, kedua orang tua dan keluarga, Kemendikbud RI atas bantuan finansial untuk penulisan tugas akhir melalui BOPTN-ITS Surabaya, Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku dosen pembimbing, Eko Purwanto dan teman-teman Gheal-Gheol, serta pihak-pihak lain yang tak bisa saya sebutkan satu-persatu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Buchor, L. "Perpindahan Panas (Heat Transfer)". Semarang : Universitas Diponegoro (2011).
- [2] Carslaw, H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. England : Oxford Univ Press (1959).
- [3] Fidiyah, S. "Aplikasi Transformasi Laplace Pada Penyelesaian Persamaan Aliran Panas dan Persamaan Gelombang". Malang : Universitas Muhammadiyah Malang (2006).
- [4] Holman, J.P. "Perpindahan Kalor". Jakarta : Erlangga (1995).
- [5] Spiegel, Murray, R., *Transformasi Laplace*. Jakarta: Penerbit Erlangga (1999).
- [6] Utomo, A. "Modul :Transformasi Laplace". Jakarta : Universitas Indonesia.
- [7] Widodo, B., Fatahillah, A., Rahayuningsih, T. "Mathematical Modelling and Numerical Solution of Iron Corrosion Problem Based on Condensation Chemical Properties". *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* (2011)5(1), PP.79-86.
- [8] Widodo, B. "Modul : Heat Transfer". Surabaya : Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2011).
- [9] Zuhair. "Transformasi Laplace dari Diferensial dan Integral". Jakarta : Universitas Mercu Buana (2007).
- [10] <http://edyuliono.blogspot.com/2010/07/ilmu-bahanlistrik.html> Diakses tanggal 25 Agustus 2012.
- [11] http://id.m.wikipedia.org/wiki/Templat:Kotak_infoemas Diakses tanggal 8 September 2012.
- [12] http://www.4shared.com/kapasitas_kalor_dan_kalor_jeni.html Diakses tanggal 7 Oktober 2012.
- [13] http://id.wikipedia.org/wiki/Massa_jenis Diakses tanggal 7 Oktober 2012.
- [14] <http://id.scribd.com/doc/89620482/Pdp-Orde2-Print> Diakses tanggal 14 Oktober 2012-vidmar.