Pengkajian Metode *Extended* Runge Kutta dan Penerapannya pada Persamaan Diferensial Biasa

Singgih Tahwin Muhammad, Erna Apriliani, Lukman Hanafi,
Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: singgihtahwin08@gmail.com, april@matematika.its.ac.id, lukman@matematika.its.ac.id

Abstrak*—Persamaan diferensial merupakan persamaan yang penyelesaiannya dapat diselesaikan menggunakan metode analitik, tetapi ada persamaan diferensial yang tidak bisa diselesaikan menggunakan metode analitik sehingga dibutuhkan metode lain untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial yaitu metode numerik. Dengan menggunakan metode numerik, maka didapatkan nilai pendekatan sebagai solusi dari permasalahan persamaan diferensial.Metode numerik yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Runge Kutta yang telah diperluas dan hasilnya akan dibandingkan dengan metode Runge Kutta. Pada penelitian ini, penulis mempelajari metode pada Runge Kutta dan Extended Runge Kutta. Pertama, dikaji dan diturunkanmodel matematika metode Runge Kutta dan Extended Runge Kutta.Kedua, metode matematika Runge Kutta dan Extended Runge Kutta diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde 1 dan 2.Ketiga, menganalisis hasil error yang dihasilkanoleh metode Runge Kutta dan Extended Runge Kutta.Dan yang terakhir, hasil simulasi berupa perbandingan maksimum error, grafik error metode Runge Kutta dan Extended Runge Kutta, dan grafikhasil dari metode analitik, Runge Kutta , dan Extended Runge Kutta.

***Kata Kunci*—RungeKutta, Persamaan Diferensial Biasa, Extended Runge Kutta.**

I. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan persamaan fungsi turunan yang ada dalam permasalahan matematika. Metode yang digunakan untuk solusi persamaan diferensial adalah metode analitik, tetapi ada persamaan yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode analitiksehingga diperlukan adanya metode lain untuk mendekati nilai sebenarnya yaitu dengan menggunakan metode numerik.

Metode numerikmerupakan metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial dengan menggunakan bantuan komputer sebagai alat hitungnya. Salah satu metode numerik yang digunakan untuk mendekati nilai eksak dari permasalahan persamaan diferensial adalahmetode Runge Kutta.

Banyak penelitian yang dilakukan untuk memperbaiki efisiensi dari metode Runge Kutta, salah satunya adalah perbaikan akurasi orde dari metode Runge Kutta dengan penambahan jumlah derajat h menggunakan deret Taylor. Penelitian Butcher[3] dan Dormand[4] menambahkan kembali jumlah fungsi evaluasi dari metode Runge Kutta yang sesuai, sebagai hasilnya yaitu merancang berbagai kemungkinan dari perbaikan orde metode Runge Kutta dengan mereduksi fungsi evaluasi. Goeken dan Johnson[5] mengusulkan sebuah kelas dari metode Runge Kutta dengan perkiraan derivative yang lebih tinggi untuk metode orde tiga dan empat. Xinyuan [6] menyajikan sebuah kelas dari formula Runge Kutta orde tiga dan empat dengan mengurangi fungsi evaluasi untuk orde pertama persamaan diferensial. Phohomsiri dan Udwadia [7] membangun sebuah akselerasi skema integrasi Runge Kutta untuk metode orde tiga dengan menggunakan 2 fungsi evaluasi per tahap dalam mengintegrasikan persamaan diferensial biasa. Penelitilain, seperti Xinyuan dan Jianlin [8] menyajikan formula metode Extended Runge Kutta untuk mengintegrasikan sistem dari persamaan diferensial biasa. Udwadia dan Farahani [9] mengembangkan akselerasi metode Runge Kutta untuk orde yang lebih tinggi. Rabiei dan Ismail [10] mengembangkan perbaikan metode Runge Kutta orde tiga untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan dua dan tiga tahap. Dalam penilitian ini,penulis mengkaji metode Extended Runge Kutta dengan Runge Kutta dan menerapkannya pada persamaan diferensial biasa orde 1 dan 2, kemudian penulis menganalisis hasil error yang dihasilkan metode Extended Runge Kutta dan Runge Kutta.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dasar teori yang digunakan dibagi menjadi beberapa bagian yaitu model umum Runge Kutta, model umum Extended Runge Kutta, deret Taylor, dan tabel Butcher. Persamaan diferensial biasa dalam Tugas Akhir menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \quad (2.1)$$

2.1 *Runge Kutta*

Secara umum Runge Kutta digunakan dalam penyelesaian masalah yang berhubungan dengan penghitungan numerik. Dalam Tugas Akhir ini, model umum dari metode Runge Kutta [1] sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n)h \quad (2.2)$$

dengana_i adalah konstan dan $k_i$adalah :

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$
$$k_n = f\big(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,}k_{n-1}h\big)$$

dengan p_{n-1} dan $q_{n-1,2}$ adalah konstan.

Persamaan (2.2) adalah fungsi utama dari Runge Kutta dan k_n adalah fungsi evaluasi dari metode Runge Kutta.Runge Kutta dalam Tugas Akhiryang digunakan adalah Runge Kutta orde dua, Runge Kutta orde tiga, dan Runge Kutta orde empat.

2.2 *Extended Runge Kutta*

Extended Runge Kutta merupakan perluasan metode Runge Kutta pada fungsi utama dan fungsi evaluasinya. Secara umum persamaannya hampir sama dengan Runge Kutta, model umum dari Extended Runge Kutta [8] sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m}(hb_i k_{i1} + h^2 c_i k_{i2}) \qquad (2.3)$$

dengan,

$$k_{i1} = f\left(x_n + \bar{c}_i h, y_n + h\sum_{s=1}^{i-1} a_{is}k_{s1}\right)$$
$$k_{i2} = f'\left(x_n + \bar{c}_i h, y_n + h\sum_{s=1}^{i-1} a_{is}k_{s1}\right)$$

Seperti dalam Runge Kutta, persamaan (2.3) merupakan fungsi utama dari Runge Kutta sedangkan k_{i1}dank_{i2}adalah fungsi evaluasi. Dalam Tugas Akhir ini, penulis menggunakan Extended Runge Kutta orde dua, Extended Runge Kutta orde tiga, Extended Runge Kutta orde empat, dan tabel Butcher untuk menentukan nilai koefisien masing-masing orde.

2.3 *Deret Taylor*

Deret Taylor secara umum digunakan untuk membantu dalam mendapatkan nilai koefisien Runge Kutta maupun Extended Runge Kutta. Dalam penerapannya, akan digunakan dua metode deret Taylor:

2.3.1 *Deret Taylor Satu Variabel*

Deret Taylor satu variabel secara umum persamaannya seperti berikut:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \frac{y_i'''}{3!}h^3 + \frac{y_i^{(4)}}{4!}h^4 + \frac{y_i^{(5)}}{5!}h^5 + O(h^6) \qquad (2.4)$$

Dengan permasalahan yang diberikan seperti pada persamaan (2.1), kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (2.1) kedalam persamaan (2.4). Sehingga persamaan (2.4) menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + f(x,y)h + \frac{f'(x,y)}{2!}h^2 + \frac{f''(x,y)}{3!}h^3 + \frac{f'''(x,y)}{4!}h^4 + \frac{f^{(4)}(x,y)}{5!}h^5 + O(h^6) \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.5) akan dibandingkan hasilnya dengan persamaan (2.2) dan (2.3). dengan menyamakan derajat h, kemudian menyamakan fungsi yang melekat pada koefisien persamaan (2.2) dan (2.3) dengan fungsi yang ada pada persamaan (2.5).

Untuk turunan dari $f(x,y)$ bisa didefinisikan sebagai berikut:

$$f'(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y))\frac{dy}{dx}$$
$$f''(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f'(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(f'(x,y))\frac{dy}{dx}$$
$$f'''(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f''(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(f''(x,y))\frac{dy}{dx}$$
$$f^{(n)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f^{(n-1)}(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(f^{(n-1)}(x,y))\frac{dy}{dx} \qquad (2.6)$$

$f^{(n)}(x,y)$mendefinisikan turunan ke n fungsi $f(x,y)$.

2.3.2 *Deret Taylor Dua Variabel*

Persamaan secara umumnya seperti dibawah ini:

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y_{i+1} - y_i)^2 + \cdots \qquad (2.7)$$

Persamaan (2.7) digunakan dalam penyederhanaan fungsi evaluasi k_i, k_{i1}, dan k_{i2}, kemudian setelah disederhanakan selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan (2.2) dan (2.3) untuk dapat dicari nilai koefisiennya dengan menyamakan nilainya dengan persamaan (2.4).

2.4 *Ketentuan Koefisien Orde*

Dalam mencari nilai koefisien yang ada pada persamaan (2.2) maupun (2.3) digunakan tabel Butcher sebagai berikut:

Tabel 2.1. Tabel Butcher koefisienorde ke m

$\bar{c}_i$	a_{is}					
0	0					
$\bar{c}_2$	a_{21}	0				
$\bar{c}_3$	a_{31}	a_{32}	0			
...	...	...	...	...		
$\bar{c}_m$	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mm-1}	0

b_i	b_1	b_2	b_3	...	b_{m-1}	b_m
c_i	c_1	c_2	c_3	...	c_{m-1}	c_m

Dengan $\sum_{i=1} a_{is} = \bar{c}_i$, dan $s = 1,2,3,\ldots,i-1$.

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penurunan model dari metode Extended Runge Kutta dan Runge Kutta beserta penerapan pada persamaan diferensial biasa.

3.1 *Extended RungeKutta Orde Dua dan RungeKutta Orde Dua*

Secara umumRungeKutta orde dua ada tiga jenis berdasarkan penghitungannya yaitu menggunkana metode Heun, metode Midpoint,dan metode Ralston. Dalam tugas akhir ini, penulis menggunakan metode Heun dengan Persamaannya sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h \quad (3.1)$$

dengan:

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$

Persamaan (3.1) akan dibandingkan dengan orde dua dari Extended Runge Kuttasebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hb_1k_{11} + hb_2k_{21} + h^2c_1k_{12} + h^2c_2k_{22} \quad (3.2)$$

dengan:

$k_{11} = f(x_n, y_n)$

$k_{21} = f(x_n + \bar{c_2}h, y_n + ha_{21}k_{11})$

$k_{12} = f'(x_n, y_n)$

$k_{22} = f'(x_n + \bar{c_2}h, y_n + ha_{21}k_{11})$

Persamaan (3.2) dapat diselesaikan dengan menyederhanakan persamaan (3.2) dengan langkah pertama menyederhanakan fungsi evaluasi k_{i1}dan k_{i2} dengan menggunakan persamaan (2.5)dan (2.7). Fungsi evaluasi k_{i1}dan k_{i2} yang telah disederhanakan, kemudian disubstitusikan kedalam persamaan (3.2). Dan yang terakhir, menyamakan hasil penyederhanaan dari persamaan (3.2) dengan persamaan (2.5), setelah menyamakan persamaan (3.2) dengan (2.5) diperoleh:

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (3.3)$$

$$b_2a_{21} + c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2}b_2{a_{21}}^2 + c_2a_{21} = \frac{1}{6} \quad (3.5)$$

$$c_2a_{21} = \frac{1}{6} \quad (3.6)$$

Dari persamaan (3.3), (3.4), (3.5), dan (3.6), maka didapatkan beberapa nilai koefisien sebagai berikut:

Tabel 3.1 koefisien orde dua

$\bar{c_i}$	a_{is}	
0	0	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

b_i	1	0
c_i	0	$\frac{1}{2}$

Nilai-nilai pada Tabel 3.1 disubstitusikan ke persamaan (3.2) untuk memperoleh penyelesaian Extended Runge Kutta orde dua

3.2 *Extended RungeKutta Orde Tiga dan RungeKutta Orde Tiga*

Secara umumnya RungeKutta orde tigayang diketahui sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \quad (3.7)$$

dengan:

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$

$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$

Persamaan RungeKutta orde tiga tersebut akan dibandingkan dengan Extended Runge Kutta orde tiga. Persamaan Extended Runge Kutta orde tiga sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hb_1k_{11} + hb_2k_{21} + hb_3k_{31} + h^2c_1k_{12} + h^2c_2k_{22} + h^2c_3k_{32} \quad (3.8)$$

dengan:

$k_{11} = f(x_n, y_n)$

$k_{21} = f(x_n + \bar{c}_2h, y_n + ha_{21}k_{11})$

$k_{31} = f(x_n + \bar{c}_3h, y_n + ha_{31}k_{11} + ha_{32}k_{21})$

$k_{12} = f'(x_n, y_n)$

$k_{22} = f'(x_n + \bar{c}_2h, y_n + ha_{21}k_{11})$

$k_{32} = f'(x_n + \bar{c}_3h, y_n + ha_{31}k_{11} + ha_{32}k_{21})$

Persamaan (38) dapat diselesaikan dengan menyederhanakan persamaan (8) dengan langkah pertama menyederhanakan fungsi evaluasi k_{i1}dan k_{i2} dengan menggunakan persamaan (2.5) dan (2.7), kemudian disubstitusikan kedalam persamaan (3.8). Persamaan (3.8) yang telah disederhanakan, kemudian dibandingkan dengan persamaan (2.5). hasil yang diperoleh :

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

$$b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}) + c_1 + c_2 + c_3 = \frac{1}{2}$$

$$b_2a_{21}^2 + b_3(a_{31} + a_{32})^2 + 2c_2a_{21} + 2c_3(a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{3}$$

$$b_3a_{32}a_{21} + c_2a_{21} + c_3(a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{6}$$

$$b_2a_{21}^3 + b_3(a_{31} + a_{32})^3 + 3c_2{a_{21}}^2 + 3c_3(a_{31} + a_{32})^2 = \frac{1}{4}$$

$$b_3a_{32}a_{21}\big(a_{21} + 2(a_{31} + a_{32})\big) + 3(c_2a_{21}^2 + c_3(a_{31} + a_{32})^2) = \frac{1}{4}$$

$$b_2\bar{c}_2 + b_3\bar{c}_3 + c_1 + c_2 + c_3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}b_2\bar{c}_2^2 + \frac{1}{2}b_3\bar{c}_3^2 + c_2\bar{c}_2 + c_3\bar{c}_3 = \frac{1}{6}$$

$$c_2\bar{c}_2 + c_3\bar{c}_3 + b_3\bar{c}_2a_{32} = \frac{1}{6}$$

$$c_3a_{32}a_{21} = \frac{1}{6}$$

Dari hasil yangdidapatkan tersebut, maka selanjutnya memberikan nilai pada salah satu koefisien agar mendapatkan fungsi evaluasi yang sederhana, sehingga diperoleh:

Tabel 3.2 koefisien orde tiga

$\bar{c}_i$	a_{is}		
0	0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

b_i	1	0	0
c_i	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$

Nilai-nilai pada Tabel 3.2 disubstitusikan ke persamaan (3.2) untuk memperoleh penyelesaian Extended Runge Kutta orde tiga.

3.3 *Extended RungeKutta Orde Empat dan RungeKutta Orde Empat*

Cara penurunan model Extended Runge Kutta dan Runge Kutta memiliki cara yang sama dengan penurunan. Persamaan Runge Kutta orde empatsebagai :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \qquad (3.9)$$

dengan:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_1 h)$$
$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_2 h)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Persamaan (3.9) dibandingkan nilai errornya dengan Extended RungeKutta orde empat.Extended RungeKuttaorde empat persamaannya sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + hb_1k_{11} + hb_2k_{21} + hb_3k_{31} + hb_4k_{41} + h^2c_1k_{12} + h^2c_2k_{22} + h^2c_3k_{32} + h^2c_4k_{42} \qquad (3.10)$$

dengan :

$$k_{11} = f(x_n, y_n)$$
$$k_{21} = f(x_n + \bar{c}_2h, y_n + ha_{21}k_{11})$$
$$k_{31} = f(x_n + \bar{c}_3h, y_n + ha_{31}k_{11} + ha_{32}k_{21})$$
$$k_{41} = f(x_n + \bar{c}_4h, y_n + h[a_{41}k_{11} + a_{42}k_{21} + a_{43}k_{31}])$$

$$k_{12} = f'(x_n, y_n)$$
$$k_{22} = f'(x_n + \bar{c}_2h, y_n + ha_{21}k_{11})$$
$$k_{32} = f'(x_n + \bar{c}_3h, y_n + ha_{31}k_{11} + ha_{32}k_{21})$$
$$k_{42} = f'(x_n + \bar{c}_4h, y_n + h[a_{41}k_{11} + a_{42}k_{21} + a_{43}k_{31}])$$

Dengan cara yang sama denganorde dua dan tigamaka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$
$$b_2\bar{c}_2 + b_3\bar{c}_3 + b_4\bar{c}_4 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}b_2\bar{c}_2^2 + \frac{1}{2}b_3\bar{c}_3^2 + \frac{1}{2}b_4\bar{c}_4^2 + c_2\bar{c}_2 + c_3\bar{c}_3 + c_4\bar{c}_4 = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{6}b_2\bar{c}_2^3 + \frac{1}{6}b_3\bar{c}_3^3 + \frac{1}{6}b_4\bar{c}_4^3 + \frac{1}{2}c_2\bar{c}_2{}^2 + \frac{1}{2}c_3\bar{c}_3{}^2 + \frac{1}{2}c_4\bar{c}_4{}^2 = \frac{1}{24}$$
$$c_2\bar{c}_2 + c_3\bar{c}_3 + c_4\bar{c}_4 + b_3\bar{c}_2a_{32} + b_4(a_{42}\bar{c}_2 + a_3\bar{c}_3) = \frac{1}{6}$$
$$b_2\bar{c}_2^2 + b_3\bar{c}_3^2 + b_4\bar{c}_4^2 + b_3\bar{c}_3a_{32}c_2 + b_4\bar{c}_4(a_{42}\bar{c}_2 + a_{43}\bar{c}_3) + c_3a_{32}\bar{c}_2 + c_4(a_{42}\bar{c}_2 + a_{43}\bar{c}_3) = \frac{1}{24}$$
$$\frac{1}{2}c_2\bar{c}_2^2 + \frac{1}{2}c_3\bar{c}_3^2 + \frac{1}{2}c_4\bar{c}_4^2 + \frac{1}{2}b_3a_{32}\bar{c}_2^2 + \frac{1}{2}b_4(a_{42}\bar{c}_2^2 + a_{43}\bar{c}_3^2) = \frac{1}{24}$$
$$b_4a_{43}a_{32}\bar{c}_2 + c_3a_{32}\bar{c}_2 + c_4(a_{42}\bar{c}_2 + a_{43}\bar{c}_3) = \frac{1}{24}$$
$$c_4a_{43}a_{32}a_{21} = \frac{1}{144}$$

Dengan cara yang sama pula dengan Extended Runge Kutta orde dua dan tiga,dihasilkan nilai koefisien sebagai berikut:

Tabel 1.4 koefisien orde empat

$\bar{c}_i$	a_{is}			
0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
1	0	1	0	
$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	0

b_i	1	0	0	0
c_i	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{72}$

Nilai-nilai pada Tabel 3.3 disubstitusikan ke persamaan (3.10) untuk memperoleh penyelesaian Extended Runge Kutta orde empat.

3.4 *Penerapan pada persamaan differensial biasa*

Pada penerapan ini menggunakan persamaan differensial biasa yang mempunyai penyelesaian eksak.Berikut ini contoh persamaan differensial biasa:

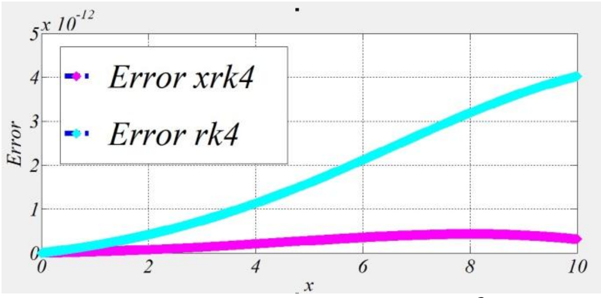
1. Persamaan $y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{80}$ dengan syarat awal $y(0) = 1$, dan $x = [0{,}10]$.

   persamaan $y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{80}$ mempunyai penyelesaian eksak $y = \frac{20}{1+19\exp\left(-\frac{x}{4}\right)}$.Berikut ini hasil yang didapat dari metode Extended Runge Kutta dan Runge Kutta dalam tabel maksimum error:

Tabel 2.1 Tabel maksimum error persamaan $y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{80}$

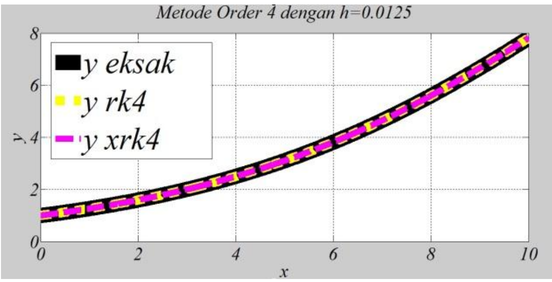
h	Maksimum Error		Waktu Komputasi	
	XRK2	RK2	XRK2	RK2
0.1	6.49e-07	7.22e-04	3.86e-03	2.38e-03
0.05	8.16e-08	1.82e-04	3.86e-03	2.39e-03
0.025	1.02e-08	4.56e-05	3.86e-03	2.39e-03
0.0125	1.28e-09	1.14e-05	3.86e-03	2.39e-03
h	Maksimum Error		Waktu Komputasi	
	XRK3	RK3	XRK3	RK3
0.1	2.63e-09	3.78e-06	4.75e-03	2.88e-03
0.05	1.67e-10	4.74e-07	4.75e-03	2.88e-03
0.025	1.05e-11	5.94e-08	4.75e-03	2.88e-03
0.0125	6.50e-13	7.44e-09	4.75e-03	2.88e-03
h	Maksimum Error		Waktu Komputasi	
	XRK4	RK4	XRK4	RK4
0.1	1.72e-09	1.64e-08	6.05e-03	3.86e-03
0.05	1.09e-10	1.03e-09	6.05e-03	3.86e-03
0.025	6.83e-12	6.47e-11	6.05e-03	3.86e-03
0.0125	4.33e-13	4.02e-12	6.05e-03	3.86e-03

Grafik yang dihasilkan dengan menggunakan Runge Kutta dan Extended Runge Kutta orde empat sebagai berikut:



Gambar 1. Plot Grafik $y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{80}$

Dari hasil perhitungan didapatkan bahwa nilai pendekatan dari dua metode memiliki error yang sangat kecil sehingga terlihat dari grafik pada gambar 1 saling berimpitan. Grafik perbandingan error sebagai berikut:



Gambar 2.Grafik Error XRK4 dan RK4

Dari hasil perhitungan kedua metode untuk nilai error yang dihasilkan yang terbaik adalah metode Extended Runge Kutta karena memiliki deraja *h* lebih tinggi.

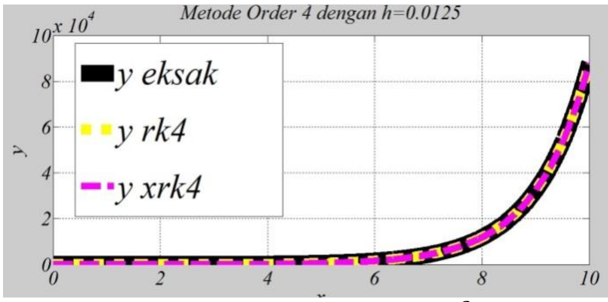
2. Persamaan $y' = y + x^2 + 1$ dengan syarat awal $y(0) = 1$, dan $x = [0,10]$.

Persamaan $y' = y + x^2 + 1$ mempunyai penyelesaian eksak $y = 4e^x - x^2 - 2x - 3$. Hasil yang dihasilkan adalah maksimum error dan grafik hasil numerik dengan eksaknya.Berikut ini tabel maksimum error:

Tabel 2.2 Tabel maksimum error $y' = y + x^2 + 1$

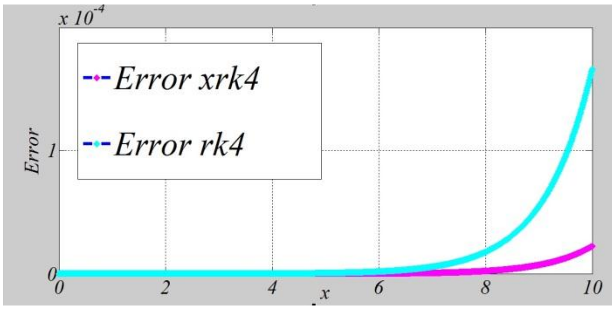
h	Maksimum Error		Waktu Komputasi	
	XRK2	RK2	XRK2	RK2
0.1	3.27e+01	1.25e+03	3.29e-03	2.24e-03
0.05	4.26e+00	3.26e+02	3.29e-03	2.24e-03
0.025	5.43e-01	8.32e+01	3.29e-03	2.24e-03
0.0125	6.86e-02	2.10e+01	3.29e-03	2.24e-03
h	Maksimum Error		Waktu Komputasi	
	XRK3	RK3	XRK3	RK3
0.1	6.32e-01	3.21e+01	5.01e-03	6.34e-03
0.05	4.12e-02	4.18e+00	5.01e-03	6.34e-03
0.025	2.63e-03	5.34e-01	5.01e-03	6.34e-03
0.0125	1.66e-04	6.74e-02	5.01e-03	6.34e-03
h	Maksimum Error		Waktu Komputasi	
	XRK4	RK4	XRK4	RK4
0.1	9.21e-02	6.32e-01	5.36e-03	4.79e-03
0.05	5.75e-03	4.12e-02	5.36e-03	4.79e-03
0.025	3.59e-04	2.63e-03	5.36e-03	4.79e-03
0.0125	2.24e-05	1.66e-04	5.37e-03	4.79e-03

Grafik hasil numerik dengan Runge Kutta dan Extended Runge Kuttaorde empat sebagai berikut:



Gambar 3. Plot Grafik $y' = y + x^2 + 1$

Dari hasil perhitungan didapatkan bahwa nilai pendekatan dari dua metode memiliki error yang sangat kecil. Berikut ini grafik perbandingan error:



Gambar 4. Perbandingan Error RK4 & XRK4

Dari hasil perhitungan kedua metode untuk nilai error yang dihasilkan yang terbaik adalah metode Extended Runge Kuttakarena memiliki orde derajat *h* yanglebih tinggi.

3. Contoh PDB dari penelitian orang lain yaitu menggunakan persamaan duffing yang diteliti oleh Tamimi[11] dengan Runge Kutta sebagai berikut: $\frac{d^2y}{dt} + y = \varepsilon(0.1\frac{dy}{dt} - 0.01y^3 + 0.1\cos(t) + 0.01\cos(t))$ dengan $\varepsilon = 0.1$ kondisi awal $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Persamaan diferensial orde dua diselesaikan dengan mengubah persamaan kedalam fungsi $y'(x, y) = f(x, y)$. Misal:

$$y = u_1(t)$$

$$\frac{du_1(t)}{dt} = u_2(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t))$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = -u_1(t) + \varepsilon(0.1u_2(t) - 0.01u_1(t)^3 + 0.1\cos(t) + 0.01\cos(t)) = f_2(t, u_1(t), u_2(t))$$

Berikut ini adalah langkah dalam mengerjakan sistem tersebut untuk metode Runge Kutta orde empat:

$$k_1 = f_1(t^{(i)}, u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$$
$$K_1 = f_2(t^{(i)}, u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$$

$$k_2 = f_1(t^{(i)} + 1/2 * h,, u_1^{(i)} + 1/2 * h * k_1, u_2^{(i)} + a21 * h * K_1)$$

$$K_2 = f_2(t^{(i)} + 1/2 * h,, u_1^{(i)} + 1/2 * h * k_1, u_2^{(i)} + a21 * h * K_1)$$

$$k_3 = f_1((t^{(i)} + 1/2 * h), (, u_1^{(i)} + 1/2 * h * k_2), (u_2^{(i)} + 1/2 * h * K_2))$$

$$K_3 = f_2((t^{(i)} + 1/2 * h), (, u_1^{(i)} + 1/2 * h * k_2), (u_2^{(i)} + 1/2 * h * K_2))$$

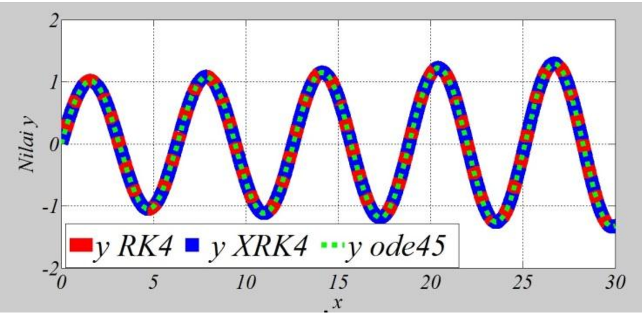
$$k_4 = f_1((t^{(i)} + h), (, u_1^{(i)} + k_3 * h), (u_2^{(i)} + K_3 * h))$$

$$K_4 = f_2((t^{(i)} + h), (, u_1^{(i)} + k_3 * h), (u_2^{(i)} + K_3 * h))$$

$$u_1^{(i+1)} = u_1^{(i)} + (1/6 * k_1 + 2/6 * k_2 + 2/6 * k_3 + 1/6 * k_4) * h$$

$$u_2^{(i+1)} = u_2^{(i)} + (1/6 * K_1 + 2/6 * K_2 + 2/6 * K_3 + 1/6 * K_4) * h$$

Dengan i dari 1 sampai iterasi yang diinginkan. Langkah untuk Extended Runge Kutta orde empat juga sama dengan Runge Kutta orde empat, sehingga menghasilkan grafik nilai numerik sebagai berikut:



Gambar 4.15 Gambar plot nilai y RK4 , XRK4, dan Ode45.

Persamaan yang diselesaikan dengan menggunakan Extended Runge Kutta orde Empat memiliki nilai yang hampir sama dengan nilai Runge Kutta orde empat hasil penelitian ataupun ode45 pada aplikasi *MatLab*.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan dalam bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

a. Langkah dalam penurunan untuk mendapatkan model metode Extended Runge Kutta memiliki kesamaan dengan metode Runge Kutta, namun pada Extended Runge Kutta ada penambahan orde derajat h sehingga ada tambahan fungsi evaluasinya secara keseluruhan hampir sama.

b. Penambahan orde derajat h dan fungsi evaluasi pada metode Extended Runge Kutta menghasilkan nilai error yang lebih kecil dibanding dengan metode Runge Kutta dan waktu komputasi Extended Runge Kutta lebih lama untuk persamaan differensial dengan orde yang lebih tinggi.

c. Penerapan metode Extended Runge Kutta selain pada persamaan differensial linier juga dapat diterapkan pada persamaan differensial biasa non linier seperti halnya penerapan pada Runge Kutta.

V. SARAN

Penelitian ini masih memiliki banyak kekurangan sehingga diperlukan banyaknya percobaan agar bisa membuktikan Extended (perluasan) Runge Kutta lebih baik dari Runge Kutta. Kritik bagi pembaca sangat diharapkan bagi penulis untuk melakukan penelitian yang lebih baik lagi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chapra, S.C., Canale, R.P..(2010). “Numerical Methods for Engineers”.Higher Education Sixth Edition, Hal.78-106 & 707-756.

[2] Jikantoro, Y.D,dkk. (2014). ”Improved Extended Runge-Kutta-Like Method dor solving First Orde IVPs”. The 3^{rd} International Conference on Computer Engineering and Mathematical Sciences(ICCEMS).

[3] J.C. Butcher., The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Runge-Kutta and General Linear Methods, *Wiley*, New York, 1987.

[4] J.R. Domand., Numerical Methods for Differential Equations: A Computational approach, *CRC Press*, New York, 1996.

[5] D. Goeken and O.,Johnson., Runge-Kutta with Higher orde derivative approximations, *Appl. Numer. Math*., 2000, 34: 207-218.

[6] W. Xinyuan., A class of Runge-Kutta formuale of orde three and four with reduced evaluations of function, *Appl. Math. Comput*., 2003, 146:417-432.

[7] Phohomsiri P. and Udwadia F. E., Acceleration o Runge-Kutta integration schemes, *Discrit. Dynamic. Nature. Soci*., 2004, 2: 307-314.

[8] W., Xinyuan. and X. Jianlin., Extended Runge-Kutta-like formulae, *Appl. Numer. Math.*, 2006, 1584-1605.

[9] F., E, Udwadia and A.,Farahani., *Accelerated Runge-Kutta methods, Discrit. Dynamic. Nature. Soci.,* 2008, doi:10.1155/2008/790619.

[10] F. Rabiei and F. Ismail, Fifth-orde Improved Runge-Kutta method for solving ordinary differential equation, *Proceeding of WSEAS Conference, Penang, Malaysia*, 2011, ISBN:978-1-61804-039-8:129-133.

[11] Tamimi, Z.A, dkk. (2014). ”Penyelesaian Persamaan Duffing Osilator pada Aplikasi Weak Signal Detection Menggunakan Metode Averaging”. Jurnal Mipa 37 (2) (2014): 192-199.