

Uji Analisis Kestabilan dengan Fungsi Lyapunov pada Model *Dengue* Tipe DEN-1

Rachel Amadea Irina, Harianto, dan Suhud Wahyudi
 Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: hariyanto@matematika.its.ac.id

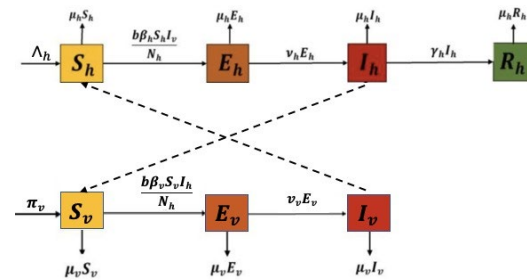
Abstrak—Penyakit demam berdarah *dengue* adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus *dengue* dan ditularkan melalui gigitan nyamuk *aedes aegypti*. Virus ini terbagi menjadi empat *serotypes*, yaitu *DEN-1*, *DEN-2*, *DEN-3* dan *DEN-4*. Virus *DEN-1* memiliki ciri khas akan menyebar dengan cepat di suatu wilayah. Namun tidak menyebabkan penyakit parah meski kasus yang ditimbulkan banyak. Terdapat dua populasi makhluk hidup yang terlibat dalam penyebaran penyakit DBD yaitu manusia sebagai *host* yang dimodelkan menggunakan model SEIR dan nyamuk *aedes aegypti* sebagai *vector* pembawa virus *dengue* yang dimodelkan menggunakan model SEI. Pada penelitian ini telah didapatkan empat titik setimbang yaitu titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan bebas penyakit untuk Λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$ dan Λ_h, π_v fungsi t . Berdasarkan analisis stabilitas dengan menggunakan fungsi *lyapunov* terbukti bahwa model demam berdarah *dengue* stabil asimtotis global pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

Kata Kunci—Analisis Stabilitas, Fungsi Lyapunov, Model Demam Berdarah *Dengue*.

I. PENDAHULUAN

PENYAKIT demam berdarah *dengue* merupakan penyakit yang disebabkan oleh virus *dengue* dan ditularkan melalui gigitan nyamuk *aedes aegypti*. Penyakit ini tersebar di seluruh daerah beriklim tropis dengan divergensi lokal karena dampak musiman seperti curah hujan dan suhu [1]. Penyakit ini akan semakin meningkat ketika memasuki musim penghujan dikarenakan pada musim hujan akan terbentuk genangan – genangan air yang menyebabkan nyamuk berkembang biak dengan sangat baik. Genangan – genangan air yang terbentuk mengakibatkan telur dari populasi nyamuk *aedes aegypti* yang belum menetas menjadi menetas sehingga populasi nyamuk *aedes aegypti* akan meningkat. Di Indonesia musim hujan biasanya terjadi secara periodik dimulai dari bulan Oktober sampai akhir Maret. Di Indonesia vektor utama penyakit demam berdarah adalah nyamuk *aedes aegypti* dan vektor sekundernya adalah *aedes ablopticus*. Kepadatan kedua vektor ini di lingkungan manusia menyebabkan meningkatnya probabilitas penularan virus *dengue* terhadap populasi manusia. Sampai saat ini belum ditemukan pengobatan khusus dan vaksin untuk penyakit demam berdarah *dengue*. Satu – satunya cara untuk mencegah penularan virus *dengue* yaitu dengan membasmi nyamuk *aedes aegypti* sebagai media pembawa virus ini [2].

Pada *paper* ini, telah dilakukan penelitian lebih lanjut dari penelitian yang telah ada sebelumnya yaitu uji analisis kestabilan dengan fungsi *lyapunov* yang diaplikasikan pada model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* tipe DEN-1 yang telah ada dengan adanya sedikit perubahan asumsi yang menyebabkan populasi manusia menjadi tidak konstan. Lalu telah didapatkan empat titik setimbang yaitu 1



Gambar 1. Model demam berdarah *dengue*.

titik kesetimbangan bebas penyakit dan 1 titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$ serta 1 titik kesetimbangan bebas penyakit dan 1 titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v fungsi t . Berdasarkan analisis stabilitas dengan menggunakan fungsi *lyapunov* terbukti bahwa model demam berdarah *dengue* stabil asimtotis global pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Model Demam Berdarah *Dengue*

Model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* berdasarkan pada penelitian yang dilakukan oleh Phaijoo [3] adalah sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} S_h = \mu_h N_h - \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - \mu_h S_h \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} E_h = \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - V_h E_h - \mu_h E_h \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} I_h = V_h E_h - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} R_h = \gamma_h I_h - \mu_h R_h \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} S_v = \pi_v - \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - \mu_v S_v \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} E_v = \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - V_v E_v - \mu_v E_v \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} I_v = V_v E_v - \mu_v I_v \quad (7)$$

Keterangan:

- S_h : Jumlah individu yang rentan tertular penyakit
- E_h : Jumlah individu yang sudah terpapar
- I_h : Jumlah individu yang sudah terinfeksi virus
- R_h : Jumlah individu yang sembuh dari penyakit
- S_v : Jumlah nyamuk yang rentan tertular penyakit
- E_v : Jumlah nyamuk yang sudah terpapar
- I_v : Jumlah individu yang sudah terinfeksi virus

Tabel 1.
Analisis stabilitas titik kesetimbangan endemic untuk Λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$

Variabel Keadaan	Titik Kesetimbangan	Analisis Stabilitas	Keterangan
$E_h - E_h^* > S_h - S_h^*$	$E_h < E_h^*, S_h < S_h^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $E_h - E_h^* > S_h - S_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $E_h < S_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_h
$I_h - I_h^* > S_h - S_h^*$	$I_h < I_h^*, S_h < S_h^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $I_h - I_h^* > S_h - S_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $I_h < S_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_h
$R_h - R_h^* > S_h - S_h^*$	$R_h < R_h^*, S_h < S_h^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $R_h - R_h^* > S_h - S_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $R_h < S_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_h
$E_h - E_h^* > I_h - I_h^*$	$E_h < E_h^*, I_h < I_h^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $E_h - E_h^* > I_h - I_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $E_h < I_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang tertular dikarenakan menurunnya tingkat penyebaran
$I_h - I_h^* > R_h - R_h^*$	$I_h < I_h^*, R_h < R_h^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $I_h - I_h^* > R_h - R_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $I_h < R_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_h
$E_v - E_v^* > S_v - S_v^*$	$E_v < E_v^*, S_v < S_v^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $E_v - E_v^* > S_v - S_v^*$ sedemikian hingga diperoleh $E_v < S_v$	Terjadi penurunan populasi nyamuk yang terinfeksi karena populasi manusia yang terinfeksi juga menurun
$I_v - I_v^* > S_v - S_v^*$	$I_v < I_v^*, S_v < S_v^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $I_v - I_v^* > S_v - S_v^*$ sedemikian hingga diperoleh $I_v < S_v$	Terjadi penurunan populasi nyamuk yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_v
$E_v - E_v^* > I_v - I_v^*$	$E_v < E_v^*, I_v < I_v^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $E_v - E_v^* > I_v - I_v^*$ sedemikian hingga diperoleh $E_v < I_v$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi menyebabkan penurunan tingkat penyebaran

- μ_h : Laju kelahiran dan kematian manusia
- μ_v : Laju kematian nyamuk
- β_h : Koefisien transmisi virus dari nyamuk ke manusia
- β_v : Koefisien transmisi virus dari manusia ke nyamuk
- b : Laju gigitan nyamuk
- γ_h : Laju kesembuhan pada individu yang sakit
- V_v : Laju perpindahan nyamuk dari E_v ke I_v
- V_h : Laju perpindahan manusia dari E_h ke I_h
- π_v : Laju kelahiran nyamuk

B. Titik Kesetimbangan

Diberikan persamaan diferensial tingkat satu:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$, vektor \bar{x} yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Definisi 1: vektor \bar{x} yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut suatu titik setimbang [4].

Pada kasus epidemiologi terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemic. Titik kesetimbangan bebas penyakit menyatakan bahwa titik berada pada keadaan setimbang dengan tidak terdapat penyebaran penyakit dalam populasi. Sedangkan titik kesetimbangan endemic terdapat penyebaran penyakit pada populasi dimana model epidemik berada dalam keadaan setimbang dan terjadi penyebaran penyakit dalam populasi [5].

C. Fungsi Lyapunov dan Prinsip Invarian LaSalle

Fungsi *lyapunov* adalah suatu fungsi yang dikonstruksikan untuk memeriksa kestabilan global dari suatu sistem nonlinier.

Definisi 2: diberikan fungsi $V: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dan $x^* \in D$ titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinier. Fungsi V disebut fungsi *lyapunov* jika memenuhi pernyataan berikut:

1. Fungsi V kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada D .

2. Fungsi $V(x) > 0$ untuk $x \in D$ dengan $x \neq x^*$ dan $V(x^*) = 0$ dengan $x = x^*$ (dengan titik kesetimbangan x^* merupakan titik minimum global).

3. Fungsi $V(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in D$. Prinsip invarian *lasalle* adalah suatu kriteria untuk menentukan stabilitas asimtotik dari sistem nonlinier.

Teorema 1: diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier dengan $D \subset \mathbb{R}^n$. Jika terdapat fungsi *lyapunov* V , dengan:

1. $D_k = \{x \in D | V(x) \leq k\}$ untuk suatu $k < 0$, merupakan himpunan terbatas,
2. $V \leq 0$ untuk setiap $x \in D_k$, dan
3. Terdapat M himpunan *invariant* terbesar dalam $H = \{x \in D_k | V(x) = 0\}$, maka setiap solusi $x(t)$ menuju ke M untuk $t \rightarrow \infty$.

Akibat 1: diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier dengan $D \subset \mathbb{R}^n$. Jika terdapat fungsi *lyapunov* V , dengan:

1. $D_k = \{x \in D | V(x) \leq k\}$ untuk suatu $k < 0$, merupakan himpunan terbatas,
2. $V \leq 0$ untuk setiap $x \in D_k$, dan
3. Terdapat M himpunan *invariant* terbesar dalam $H = \{x \in D_k | V(x) = 0\}$, tidak memuat solusi kecuali D_k merupakan D , maka sistem tersebut stabil asimtotik global [4].

III. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang akan digunakan dalam pengerjaan *paper* ini adalah sebagai berikut:

1. Studi literatur. Melakukan studi literatur dari sumber literatur seperti *paper* atau jurnal baik dari dalam maupun luar negeri yang berkaitan dengan pemodelan demam berdarah *dengue*.
2. Menetapkan dan memahami model. Pada tahap ini dilakukan pemilihan model dari jurnal-jurnal yang telah dibaca setelah itu akan dipahami model tersebut dan dimodifikasi sesuai dengan asumsi yang telah ditetapkan sehingga akan dihasilkan sebuah model matematika

Tabel 2.

Analisis stabilitas kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v fungsi t			
Variabel Keadaan	Titik Kesetimbangan	Analisis Stabilitas	Keterangan
$S_h - S_h^* > E_h - E_h^* - I_h^*$	$S_h > S_h^*; E_h > E_h^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $S_h - S_h^* > E_h - E_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $S_h > E_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_h
		Stabil asimtotis global terjadi jika $S_h < S_h^*; E_h < E_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $E_h > I_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang tertular dikarenakan menurunnya tingkat penyebaran
$I_h - I_h^* > R_h - R_h^* - R_h^*$	$I_h < I_h^*; R_h < R_h^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $I_h - I_h^* > R_h - R_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $I_h > R_h$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_h
		Stabil asimtotis global terjadi jika $I_h < I_h^*; R_h < R_h^*$ sedemikian hingga diperoleh $S_v > E_v$	Terjadi penurunan populasi nyamuk yang terinfeksi dan terjadi peningkatan populasi S_v
$E_v - E_v^* > I_v - I_v^* - I_v^*$	$E_v < E_v^*; I_v < I_v^*$	Stabil asimtotis global terjadi jika $E_v - E_v^* > I_v - I_v^*$ sedemikian hingga diperoleh $E_v > I_v$	Terjadi penurunan populasi manusia yang terinfeksi menyebabkan penurunan tingkat penyebaran

dalam bentuk sistem persamaan diferensial seperti berikut:

$$\frac{d}{dt} S_h = \Lambda_h - \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - \mu_h S_h$$

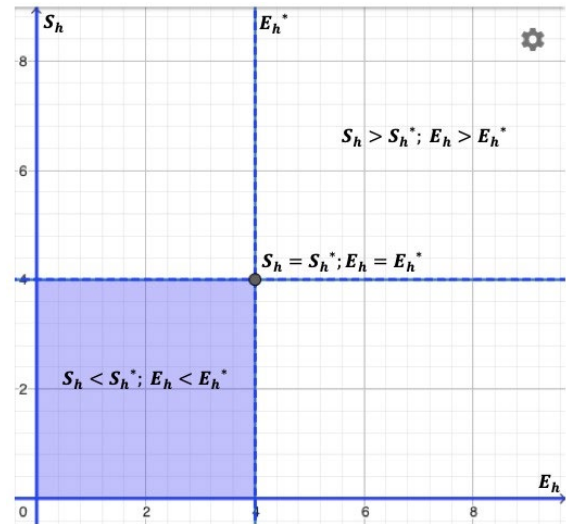
$$\frac{d}{dt} E_h = \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - V_h E_h - \mu_h E_h$$

$$\frac{d}{dt} I_h = V_h E_h - \gamma_h I_h - \mu_h I_h$$

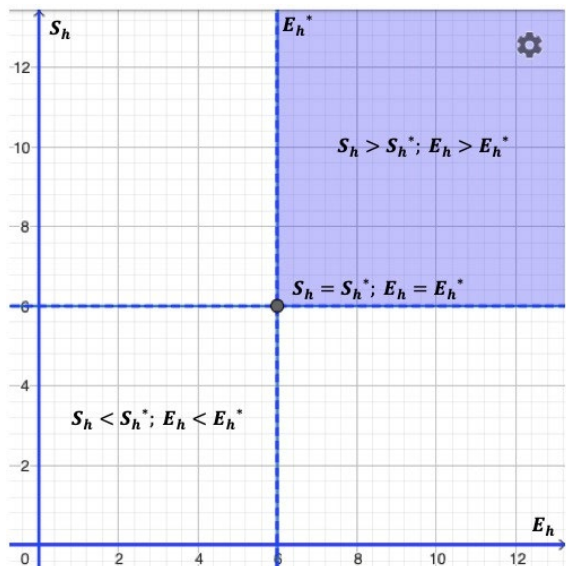
$$\frac{d}{dt} R_h = \gamma_h I_h - \mu_h R_h; \frac{d}{dt} S_v = \pi_v - \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - \mu_v S_v$$

$$\frac{d}{dt} E_v = \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - V_v E_v - \mu_v E_v; \frac{d}{dt} I_v = V_v E_v - \mu_v I_v$$

3. Menyusun metode penyelesaian. Pada tahap ini telah dilakukan validasi bahwa model yang dikonstruksikan sesuai dengan asumsi yang telah ditetapkan memiliki



Gambar 2. Daerah yang memenuhi kondisi 1 untuk stabilitas *lyapunov*.



Gambar 3. Daerah yang memenuhi kondisi 1 untuk stabilitas *lyapunov*.

solusi yang positif serta memperoleh daerah penyelesaian dari model penyebaran demam berdarah *dengue* melalui penyelesaian persamaan diferensial lengkap yang diperoleh melalui pemisalan sehingga terbentuk persamaan karakteristik yang menghasilkan akar-akar karakteristik untuk memperoleh penyelesaian komplementer (y_c) serta menggunakan operator D untuk memperoleh penyelesaian partikular (y_p). Setelah itu, dicari titik kesetimbangan bebas penyakit $E^0(S_h^0, E_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, E_v^0, I_v^0)$ yang diperoleh saat $I_h = 0$ dan $I_v = 0$. Titik kesetimbangan endemik $E^*(S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, E_v^*, I_v^*)$ yang diperoleh saat $I_h \neq 0$ dan $I_v \neq 0$.

4. Analisis dan evaluasi hasil. Pada tahap ini dilakukan uji kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit (E^0) dan titik kesetimbangan endemik (E^*) menggunakan fungsi $G_1(t)$, $G_2(t)$, $W_1(t)$, dan $W_2(t)$ serta membuktikan bahwa fungsi tersebut memenuhi definisi dan teorema fungsi *lyapunov* yang telah dijelaskan oleh Khalil.

5. Penarikan kesimpulan. Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berupa hasil dari uji kestabilan pada model penyebaran demam berdarah *dengue*

berdasarkan fungsi *lyapunov* yang dikaitkan dengan prinsip invarians *lasalle* yang tertera pada tinjauan pustaka dikaitkan serta memberikan saran berupa perbaikan dan pengembangan untuk penelitian ke depannya.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Demam Berdarah Dengue

Model demam berdarah *dengue* yang di analisis pada *paper* ini ditunjukkan pada kompartemen model Gambar 1.

Model demam berdarah *dengue* merupakan model *host-vector*. Manusia sebagai *host* dan nyamuk sebagai *vector*. Manusia diklasifikasikan ke dalam empat kelas yaitu *susceptible*, *exposed*, *infected*, dan *recovered*, sedangkan nyamuk diklasifikasikan ke dalam tiga kelas yaitu *susceptible*, *exposed*, dan *infected*. Kelas *recovered* dalam populasi vektor tidak diperhitungkan karena masa infeksi pada nyamuk berakhir dengan kematiannya.

Individu yang rentan terinfeksi (*exposed state*) oleh gigitan nyamuk terinfeksi dengan laju $(b\beta_h I_v)/N_h$ dimana b adalah laju gigitan nyamuk, adalah probabilitas penularan *dengue* dari nyamuk ke manusia. Manusia yang terpapar (*exposed*) akan mengalami kematian alami atau pindah ke kelas terinfeksi (*infected class*) dengan laju perpindahan sebesar V_h setelah menunjukkan gejala klinis penyakit demam berdarah, individu yang terinfeksi akan mengalami kematian karena penyebab alami atau pulih dengan laju pemulihan sebesar γ_h . Pada model yang akan diteliti pada *paper* ini akan memperhatikan tingkat kelahiran (adanya pertumbuhan populasi) yang menyebabkan populasi manusia menjadi tidak konstan, sehingga terbentuklah persamaan matematika sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} S_h = \lambda_h - \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - \mu_h S_h \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt} E_h = \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - V_h E_h - \mu_h E_h \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} I_h = V_h E_h - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} R_h = \gamma_h I_h - \mu_h R_h \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt} S_v = \pi_v - \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - \mu_v S_v \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt} E_v = \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - V_v E_v - \mu_v E_v \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt} I_v = V_v E_v - \mu_v I_v \tag{14}$$

dengan $\lambda_h, \mu_h, \mu_v, b, \beta_h, \beta_v, \gamma_h, V_h, V_v, \pi_v$ adalah konstanta positif.

Keterangan:

λ_h : Laju pertumbuhan individu daam populasi

Jumlah total individu dalam populasi dinyatakan dengan $N_h = S_h + E_h + I_h + R_h$ dan jumlah total nyamuk dalam populasi dinyatakan dengan $N_v = S_v + E_v + I_v$.

Kondisi awal dari model matematika di atas adalah $S_h(0) = S_{h0}, E_h(0) = E_{h0}, I_h(0) = I_{h0}, R_h(0) = R_{h0},$

$S_v(0) = S_{v0}, E_v(0) = E_{v0}, I_v(0) = I_{v0}, N_h(0) = N_{h0}, N_v(0) = N_{v0}.$

B. Solusi Positif dan Daerah Penyelesaian

Daerah penyelesaian untuk sistem (8)-(14) adalah R_7^+ . Dengan menjumlahkan sistem persamaan untuk masing-masing laju pada populasi manusia dan populasi nyamuk diperoleh sistem persamaan linier orde 1 adalah:

$$\frac{d}{dt} N_h(t) + \mu_h N_h(t) = \lambda_{ht_0} \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt} N_v(t) + \mu_v N_v(t) = \pi_{vt_0} \tag{16}$$

Persamaan 15 dan 16 dapat diselesaikan dengan pengalihan faktor integrasi lalu diintegrasikan terhadap fungsi t sehingga didapatkan solusi umum dari sistem sebagai berikut:

$$N_h(t) = ce^{-\mu_h t} + \frac{\lambda_{ht_0}}{\mu_h} \tag{17}$$

$$N_v(t) = ce^{-\mu_v t} + \frac{\pi_{vt_0}}{\mu_v} \tag{18}$$

Dengan mensubstitusikan $t = 0$ pada persamaan 17 dan 18, maka diperoleh solusi khusus dari sistem sebagai berikut:

$$N_h(t) = N_{h0} e^{-\mu_h t} + \frac{\lambda_{ht_0}}{\mu_h} (1 - e^{-\mu_h t}) \geq 0 \tag{19}$$

$$N_v(t) = N_{v0} e^{-\mu_v t} + \frac{\pi_{vt_0}}{\mu_v} (1 - e^{-\mu_v t}) \geq 0 \tag{20}$$

sehingga untuk t yang besar diperoleh penyelesaian:

$$N_h(t) = \frac{\lambda_{ht_0}}{\mu_h} \geq 0 \tag{21}$$

$$N_v(t) = \frac{\pi_{vt_0}}{\mu_v} \geq 0 \tag{22}$$

Dengan demikian diperoleh daerah invarian positif untuk sistem persamaan 8-14 sebagai berikut untuk λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$.

$$\Omega = \left\{ (S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v, I_v) \in R_7^+ : N_h(t) \leq \frac{\lambda_{ht_0}}{\mu_h}, N_v(t) \leq \frac{\pi_{vt_0}}{\mu_v} \right\}$$

dengan cara yang sama untuk λ_h, π_v fungsi t dengan:

$\lambda_h(t) = \sigma S_h(t)$, dengan σ = rate kelahiran manusia
 $\pi_v(t) = \alpha S_v(t)$, dengan α = rate kelahiran nyamuk

Diperoleh daerah invarian positif sebagai berikut:

$$\Omega = \{ (S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v, I_v) \in R_7^+ : N_h(t) \leq N_{h0}, N_v(t) \leq N_{v0} \}$$

C. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Titik tersebut dapat diperoleh dengan menyatakan ruas kiri dari persamaan 8-14 bernilai nol, kemudian disubstitusikan nilai $I_h = 0$ dan $I_v = 0$.

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit untuk λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$ adalah sebagai berikut:

$$E^0(S_h^0, E_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, E_v^0, I_v^0) = \left(\frac{\lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{\pi_v}{\mu_v}, 0, 0 \right)$$

Sedangkan dengan cara yang sama diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit untuk Λ_h, π_v fungsi t adalah sebagai berikut:

$$E^0(S_h^0, E_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, E_v^0, I_v^0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

D. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah suatu keadaan terjadi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Titik tersebut dapat diperoleh dengan menyatakan ruas kiri pada persamaan 8-14 bernilai nol, kemudian disubstitusikan nilai $I_h \neq 0$ dan $I_v \neq 0$. Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$ adalah sebagai berikut:

$$S_h^* = \frac{\Lambda_h \gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h) - (V_h + \mu_h) (N_h \mu_h - \Lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2}{\mu_h \gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)}$$

$$E_h^* = \frac{(N_h \mu_h - \Lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2}{\gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)}$$

$$I_h^* = \frac{V_h}{\gamma_h + \mu_h} \frac{(N_h \mu_h - \Lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2}{\gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)}$$

$$R_h^* = \frac{\gamma_h \alpha V_h}{\mu_h (\gamma_h + \mu_h)} \frac{(N_h \mu_h - \Lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2}{\gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)}$$

$$S_v^* = \frac{\pi_v V_v (\alpha - \mu_v) - \mu_v (V_v + \mu_v) (N_v \mu_v - \pi_v)}{\mu_v V_v (\alpha - \mu_v)}$$

$$E_v^* = \frac{\mu_v (N_v \mu_v - \pi_v)}{V_v (\alpha - \mu_v)}$$

$$I_v^* = \frac{\alpha V_v (N_v \mu_v - \pi_v)}{\mu_v V_v (\alpha - \mu_v)}$$

Sedangkan dengan cara yang sama diperoleh titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v fungsi t adalah sebagai berikut:

$$S_h^* = \frac{N_h \mu_h}{\sigma}$$

$$E_h^* = \frac{N_h (\sigma \mu_h - \mu_h^2)}{\sigma \mu_h + \sigma V_h}$$

$$I_h^* = \frac{V_h N_h (\sigma \mu_h - \mu_h^2)}{(\sigma \mu_h + \sigma V_h) (\gamma_h + \mu_h)}$$

$$R_h^* = \frac{V_h N_h \gamma_h (\sigma \mu_h - \mu_h^2)}{\mu_h (\sigma \mu_h + \sigma V_h) (\gamma_h + \mu_h)}$$

$$S_v^* = \frac{N_v \mu_v}{\alpha}$$

$$E_v^* = \frac{N_v (\mu_v \alpha - \mu_v^2)}{\mu_v \alpha + V_v \alpha}$$

$$I_v^* = \frac{V_v N_v (\mu_v \alpha - \mu_v^2)}{\mu_v \alpha + V_v \alpha}$$

E. Analisis Stabilitas Pada Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Menganalisa kestabilan global pada model demam berdarah *dengue* dengan mengonstruksi fungsi *lyapunov* yang mungkin.

Kestabilan global di titik kesetimbangan bebas penyakit untuk Λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$ diberikan oleh fungsi *lyapunov* adalah sebagai berikut [6]:

$$G_1(t) = (S_h - S_h^0 \ln S_h) + E_h + I_h + R_h + (S_v - S_v^0 \ln S_v) + E_v + I_v$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_1}{dt} &= \left(1 - \frac{S_h^0}{S_h}\right) S_h' + E_h' + I_h' + R_h' + \left(1 - \frac{S_v^0}{S_v}\right) S_v' + E_v' + I_v' \\ &= -\Lambda_h \frac{(S_h - S_h^0)^2}{S_h S_h^0} - \pi_v \frac{(S_v - S_v^0)^2}{S_v S_v^0} - \mu_h E_h - I_h \left(\mu_h - \frac{b\beta_v S_v^0}{N_h}\right) \\ &\quad - I_h \left(\mu_h - \frac{b\beta_v S_v^0}{N_h}\right) - \mu_h R_h - I_v \left(\mu_v - \frac{b\beta_h S_h^0}{N_h}\right) - \mu_v E_v \end{aligned}$$

Sehingga himpunan *invariant* terbesar adalah E^0 . Oleh karena itu, dengan menggunakan prinsip invarian *lasalle* terbukti bahwa sistem stabil asimtotis global disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit.

Kestabilan global di titik kesetimbangan bebas penyakit untuk Λ_h, π_v fungsi t diberikan oleh fungsi *lyapunov* adalah sebagai berikut [6]:

$$G_2(t) = (S_h - S_h^0 \ln S_h) + E_h + I_h + R_h + (S_v - S_v^0 \ln S_v) + E_v + I_v$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_2}{dt} &= \left(1 - \frac{S_h^0}{S_h}\right) S_h' + E_h' + I_h' + R_h' + \left(1 - \frac{S_v^0}{S_v}\right) S_v' + E_v' + I_v' \\ &= (\mu_h - \sigma) \left(1 - \frac{S_h}{S_h^0}\right) S_h^0 - I_h \left(\mu_h - \frac{b\beta_v S_v^0}{N_h}\right) - \mu_h E_h - \mu_h R_h \\ &\quad - I_v \left(\mu_v - \frac{b\beta_h S_h^0}{N_h}\right) - \mu_v E_v + (\mu_v - \alpha) \left(1 - \frac{S_v}{S_v^0}\right) S_v^0 \end{aligned}$$

Karena pada kondisi bebas penyakit $I_h; E_h; R_h; I_v; E_v$ bernilai 0, maka

$$\frac{dG_2}{dt} = (\mu_h - \sigma) \left(1 - \frac{S_h}{S_h^0}\right) S_h^0 + (\mu_v - \alpha) \left(1 - \frac{S_v}{S_v^0}\right) S_v^0$$

$$\frac{dG_2}{dt} = (\mu_h - \sigma) (S_h^0 - S_h) + (\mu_v - \alpha) (S_v^0 - S_v)$$

$$\frac{dG_2}{dt} \leq 0, \text{ jika}$$

$$\mu_h - \sigma < 0; \mu_v - \alpha < 0 \text{ dan } S_h^0 - S_h > 0; S_v^0 - S_v > 0$$

$$\mu_h - \sigma < 0; \mu_v - \alpha > 0 \text{ dan } S_h^0 - S_h > S_v^0 - S_v$$

$$\mu_h - \sigma > 0; \mu_v - \alpha < 0 \text{ dan } S_h^0 - S_h < S_v^0 - S_v$$

$$\frac{dG_2}{dt} = 0, \text{ jika } S_h^0 = S_h; S_v^0 = S_v$$

Sehingga himpunan *invariant* terbesar adalah E^0 . Oleh karena itu, dengan menggunakan prinsip invarian *lasalle* terbukti bahwa sistem stabil asimtotis global disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit.

F. Analisis Stabilitas Pada Titik Kesetimbangan Endemik

Menganalisa kestabilan global pada model demam berdarah *dengue* dengan mengonstruksi fungsi *lyapunov* yang mungkin.

Kestabilan global di titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$ diberikan oleh fungsi *lyapunov* sebagai berikut [6]:

$$W_1(t) = \frac{(S_h - S_h^*)^2}{2} + \frac{(E_h - E_h^*)^2}{2} + \frac{(I_h - I_h^*)^2}{2} + \frac{(R_h - R_h^*)^2}{2} + \frac{(S_v - S_v^*)^2}{2} + \frac{(E_v - E_v^*)^2}{2} + \frac{(I_v - I_v^*)^2}{2}$$

$$\frac{dW_1}{dt} = (S_h - S_h^*)S_h' + (E_h - E_h^*)E_h' + (I_h - I_h^*)I_h' +$$

$$(R_h - R_h^*)R_h' + (S_v - S_v^*)S_v' +$$

$$(E_v - E_v^*)E_v' + (I_v - I_v^*)I_v'$$

$$\frac{dW_1}{dt} = -\mu_h(S_h - S_h^*)^2 - \mu_h\{E_h(E_h - E_h^*) - E_h^*(S_h - S_h^*)\}$$

$$-\mu_h\{I_h(I_h - I_h^*) - I_h^*(S_h - S_h^*)\}$$

$$-\mu_h\{R_h(R_h - R_h^*) - R_h^*(S_h - S_h^*)\}$$

$$-V_h E_h(E_h - E_h^* - I_h + I_h^*) - \gamma_h I_h(I_h - I_h^* - R_h + R_h^*)$$

$$-\frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v(S_h - S_h^* - E_h + E_h^*) - \mu_v(S_v - S_v^*)^2$$

$$-\mu_v\{E_v(E_v - E_v^*) - E_v^*(S_v - S_v^*)\}$$

$$-\mu_v\{I_v(I_v - I_v^*) - I_v^*(S_v - S_v^*)\}$$

$$-V_v E_v(E_v - E_v^* - I_v + I_v^*)$$

$$-\frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h(S_v - S_v^* - E_v + E_v^*)$$

$$\frac{dW_1}{dt} \leq 0 \text{ dan } \frac{dW_1}{dt} = 0, \text{ jika } S_h = S_h^*; E_h = E_h^*; I_h = I_h^*; R_h = R_h^*; S_v = S_v^*; E_v = E_v^*; I_v = I_v^*.$$

Sehingga himpunan *invariant* terbesar adalah E^* . Oleh karena itu, dengan menggunakan prinsip invarian *lasalle* terbukti bahwa sistem stabil asimtotis global disekitar titik kesetimbangan endemik. Analisis stabilitas pada masing-masing kriteria yang memenuhi dinyatakan pada Tabel 1.

Pada Gambar 2 merupakan daerah yang memenuhi kondisi 1 untuk stabilitas *lyapunov*. Daerah yang diarsir pada Gambar 2 menunjukkan bahwa kondisi 1 akan stabil asimtotis global saat $E_h < E_h^*$ dan $S_h < S_h^*$. Gambar 2 merupakan koordinat kartesian dimana E_h sebagai sumbu X dan S_h sebagai sumbu Y. Kondisi dimana $S_h = S_h^*$ dan $E_h = E_h^*$ akan tercapai saat terjadinya pertemuan antara S_h^* dan E_h^* .

Dari Tabel 1 dapat disimpulkan bahwa model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* akan stabil asimtotis global di titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v konstan pada saat kondisi awal $t = 0$ ketika $E_h < I_h < R_h < S_h$ dan $E_v < I_v < S_v$, yang berarti terjadi penurunan tingkat penyebaran sehingga populasi manusia yang terinfeksi menurun menyebabkan peningkatan populasi manusia yang sehat serta penurunan populasi nyamuk yang terinfeksi.

Kestabilan global di titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v fungsi t diberikan oleh fungsi *lyapunov* adalah sebagai berikut [6]:

$$W_2(t) = \frac{(S_h - S_h^*)^2}{2} + \frac{(E_h - E_h^*)^2}{2} + \frac{(I_h - I_h^*)^2}{2} + \frac{(R_h - R_h^*)^2}{2} + \frac{(S_v - S_v^*)^2}{2} + \frac{(E_v - E_v^*)^2}{2} + \frac{(I_v - I_v^*)^2}{2}$$

$$\frac{dW_2}{dt} = (S_h - S_h^*)S_h' + (E_h - E_h^*)E_h' + (I_h - I_h^*)I_h' +$$

$$+(R_h - R_h^*)R_h' + (S_v - S_v^*)S_v' + (E_v - E_v^*)E_v' +$$

$$+(I_v - I_v^*)I_v'$$

$$\frac{dW_2}{dt} = -\mu_h S_h E_h^* \left(1 - \frac{S_h}{S_h^*}\right) - \mu_h S_h I_h^* \left(1 - \frac{S_h}{S_h^*}\right)$$

$$-\mu_h S_h R_h^* \left(1 - \frac{S_h}{S_h^*}\right) - \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v(S_h - S_h^* - E_h + E_h^*)$$

$$-V_h E_h(E_h - E_h^* - I_h + I_h^*) - \mu_h\{E_h(E_h - E_h^*)\}$$

$$-\mu_h\{I_h(I_h - I_h^*)\} - \gamma_h I_h(I_h - I_h^* - R_h + R_h^*)$$

$$-\mu_h\{R_h(R_h - R_h^*)\} - \mu_v S_v E_v^* \left(1 - \frac{S_v}{S_v^*}\right)$$

$$-\mu_v S_v I_v^* \left(1 - \frac{S_v}{S_v^*}\right) - \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h(S_v - S_v^* - E_v + E_v^*)$$

$$-V_v E_v(E_v - E_v^* - I_v + I_v^*) - \mu_v\{E_v(E_v - E_v^*)\}$$

$$-\mu_v\{I_v(I_v - I_h^*)\}$$

$$\frac{dW_2}{dt} \leq 0 \text{ dan } \frac{dW_2}{dt} = 0, \text{ jika } S_h = S_h^*; E_h = E_h^*; I_h = I_h^*; R_h = R_h^*; S_v = S_v^*; E_v = E_v^*; I_v = I_v^*.$$

Sehingga himpunan *invariant* terbesar adalah E^* . Oleh karena itu, dengan menggunakan prinsip invarian *lasalle* terbukti bahwa sistem stabil asimtotis global disekitar titik kesetimbangan endemik. Analisis stabilitas pada masing-masing kriteria yang memenuhi dinyatakan pada Tabel 2.

Dari Tabel 2 dapat disimpulkan bahwa model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* akan stabil *lyapunov* di titik kesetimbangan endemik untuk Λ_h, π_v fungsi t ketika $E_h < I_h < R_h < S_h$ dan $E_v < I_v < S_v$, yang berarti terjadi penurunan tingkat penyebaran sehingga populasi manusia yang terinfeksi menurun menyebabkan peningkatan populasi manusia yang sehat serta penurunan populasi nyamuk yang terinfeksi.

Pada Gambar 3 merupakan daerah yang memenuhi kondisi 1 untuk stabilitas *lyapunov*. Daerah yang diarsir pada Gambar 3 menunjukkan bahwa kondisi 1 akan stabil asimtotis global saat $E_h < E_h^*$ dan $S_h < S_h^*$. Gambar 3 merupakan koordinat kartesian dimana E_h sebagai sumbu X dan S_h sebagai sumbu Y. Kondisi dimana $S_h = S_h^*$ dan $E_h = E_h^*$ akan tercapai saat terjadinya pertemuan antara S_h^* dan E_h^* .

V. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang dapat diambil berdasarkan hasil analisis yang pertama, Model matematika penyebaran demam berdarah *dengue* yang diteliti dalam tugas akhir ini merupakan model *host-vector*. Manusia sebagai *host* dan nyamuk *aedes aegypti* sebagai vektor pembawa virus *dengue*

yang dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_h &= \lambda_h - \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - \mu_h S_h \\ \frac{d}{dt} E_h &= \frac{b\beta_h}{N_h} S_h I_v - V_h E_h - \mu_h E_h \\ \frac{d}{dt} I_h &= V_h E_h - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \\ \frac{d}{dt} R_h &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h \\ \frac{d}{dt} S_v &= \pi_v - \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - \mu_v S_v \\ \frac{d}{dt} E_v &= \frac{b\beta_v}{N_h} S_v I_h - V_v E_v - \mu_v E_v \\ \frac{d}{dt} I_v &= V_v E_v - \mu_v I_v \end{aligned}$$

Kedua, Berdasarkan analisis model matematika penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* diperoleh empat titik setimbang, yaitu: (a) Titik setimbang bebas penyakit $(\frac{\lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{\pi_v}{\mu_v}, 0, 0)$ untuk λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$, yang stabil asimtotis global; (b) Titik setimbang bebas penyakit $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ untuk λ_h, π_v fungsi t , yang stabil asimtotis global; (c) Titik setimbang endemik:

$$\left(\frac{\lambda_h \gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h) - (V_h + \mu_h) (N_h \mu_h - \lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2}{\mu_h \gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)} ; \frac{(N_h \mu_h - \lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2}{\gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)} ; \frac{V_h (N_h \mu_h - \lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2}{\gamma_h + \mu_h} ; \frac{\gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)}{\gamma_h \alpha V_h (N_h \mu_h - \lambda_h) (\gamma_h + \mu_h)^2} ; \frac{\pi_v V_v (\alpha - \mu_v) - \mu_v}{\mu_h (\gamma_h + \mu_h)} ; \frac{\gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)}{\gamma_h V_h (\alpha - \gamma_h - \mu_h)} ; \frac{\mu_v V_v (\alpha - \mu_v)}{V_v + \pi_v} ; \frac{\mu_v (N_v \mu_v - \pi_v)}{\mu_v (N_v \mu_v - \pi_v)} ; \frac{\alpha V_v (N_v \mu_v - \pi_v)}{\mu_v V_v (\alpha - \mu_v)} \right)$$

untuk λ_h, π_v konstan pada kondisi awal $t = 0$, yang stabil asimtotis global; (d) Titik setimbang endemik:

$$\left(\frac{N_h \mu_h}{\sigma} ; \frac{N_h (\sigma \mu_h - \mu_h^2)}{\sigma \mu_h + \sigma V_h} ; \frac{V_h N_h (\sigma \mu_h - \mu_h^2)}{(\sigma \mu_h + \sigma V_h) (\gamma_h + \mu_h)} ; \frac{V_h N_h \gamma_h}{\mu_h} ; \frac{N_v \mu_v}{(\sigma \mu_h + \sigma V_h) (\gamma_h + \mu_h)} ; \frac{N_v \mu_v}{\sigma} ; \frac{N_v (\mu_v \alpha - \mu_v^2)}{\mu_v \alpha + V_v \alpha} ; \frac{V_v N_v (\mu_v \alpha - \mu_v^2)}{\mu_v \alpha + V_v \alpha} \right)$$

untuk λ_h, π_v fungsi t , yang stabil asimtotis global.

Ketiga, Berdasarkan analisis stabilitas dengan menggunakan fungsi *lyapunov* terbukti bahwa model penyebaran demam berdarah *dengue* stabil asimtotis global pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H. R. Pandey, G. R. Phaijoo, and D. B. Gurung, "Fractional-order dengue disease epidemic model in Nepal," *Int J Appl Comput Math*, vol. 8, no. 5, p. 259, Oct. 2022, doi: 10.1007/s40819-022-01459-2.
- [2] L. O. Sabran and M. Jannah, "Model matematika SEIRS-SEI pada penyebaran penyakit demam berdarah dengue dengan pengaruh suhu," *MAP (Mathematics and Applications) Journal*, vol. 2, no. 2, pp. 66–78, Dec. 2020, doi: 10.15548/map.v2i2.2267.
- [3] G. R. Phaijoo and D. B. Gurung, "Sensitivity analysis of SEIR-SEI model of dengue disease," *GAMS Journal of Mathematics and Mathematical Bioscience*, vol. 6, pp. 41–50, 2018.
- [4] R. A. Barrio and C. Varea, "Non-linear systems," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 372, no. 2, pp. 210–223, Dec. 2006, doi: 10.1016/j.physa.2006.08.011.
- [5] A. Puspitasari, K. Kamiran, and N. Asiyah, "Analisis kestabilan dan kontrol optimal model penyebaran tuberkulosis (TB) dengan terapi dan vaksinasi menggunakan metode runge kutta," *Jurnal Sains dan Seni ITS*, vol. 8, no. 2, Jan. 2020, doi: 10.12962/j23373520.v8i2.48830.
- [6] M. R. Hasan, A. Hobiny, and A. Alshehri, "Analysis of vector-host SEIR-SEI dengue epidemiological model," *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 20, p. 57, Nov. 2022, doi: 10.28924/2291-8639-20-2022-57.