Estimasi Parameter pada Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) Menggunakan *Kalman Filter* untuk Menentukan Harga *Zero Coupon Bond*

Eni Mariana, Erna Apriliani, dan Sentot Didik Surjanto
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: april@matematika.its.ac.id

***Abstrak*—Tingkat suku bunga sangat berpengaruh pada penentuan harga sekuritas.Salah satunya pada penentuan harga *bond* yang nilainya bergantung pada tingkat suku bunga yang berlaku saat itu.Jenis *bond*yang dibahas pada tugas akhir ini adalah *zero coupon bond. Bond*jenis ini tidak membagikan kupon atau bunga pada setiap periode.Jadi, penerbit *bond*membayarkan pokok hutang dan bunga pada saat masa jatuh tempo.Pada kenyataannya, tingkat suku bunga bersifat stokastik.Sehingga diperlukan model suku bunga stokastik yang bisa mewakili kondisi riil tingkat suku bunga pasar.Pada tugas akhir ini digunakan model suku bunga Cox Ingersoll Ross (CIR).Untuk menentukan harga *bond* diperlukan nilai parameter dari model suku bunga CIR. Sehingga perlu dilakukan estimasi parameter.Nilai parameter didapatkan mennggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS). Hasil estimasi tersebut digunakan sebagai input pada metode *Kalman Filter*untuk mengestimasi tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR.Pada tugas akhir ini, nilai parameter dan tingkat suku bunga harian hasil estimasi akan digunakan untuk menentukan harga *zero coupon bond*.**

Kata Kunci*—Tingkat suku bunga, Model CIR, OLS, *Kalman Filter, zero coupon bond

I. PENDAHULUAN

Pada dunia ekonomi, tingkat suku bunga berpengaruh penting dalam penentuan harga suatu sekuritas, contohnya pada penentuan harga *bond* (obligasi), saham, dan opsi. Pergerakan tingkat suku bunga merupakan proses stokastik karena selalu berubah-ubah sepanjang waktu, sehingga diperlukan model stokastik untuk bisa menjelaskan pergerakan dari tingkat suku bunga tersebut. Model tingkat suku bunga yang dibahas pada tugas akhir ini adalah model Cox Ingersoll Ross (CIR). Model ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 1985 oleh Cox, Ingersoll, dan Ross[1]. Model CIR menjamin tingkat suku bunga bernilai positif dan memiliki sifat mean reversion yakni memiliki kecenderungan kembali ke nilai rata-rata jangka panjang.

Salah satu sekuritas yang nilainya bergantung pada tingkat suku bunga adalah *bond* (obligasi). *Bond*adalah surat hutang yang diterbitkan oleh pemerintah atau perusahaan untuk memenuhi kebutuhan dana. *Bond*merupakan contoh dari investasi yang bebas resiko karena menjamin adanya keuntungan dari pengembalian yang akan diterima pemegang *bond* pada saat jatuh tempo, yakni berupa nilai pokok dan bunga. Jenis *bond*yang dibahas pada tugas akhir ini adalah*zero couponbond* atau obligasi tanpa kupon. Pemegang *bond*akan menerima pembayaran berupa nilai pokok hutang dan bunga pada saat jatuh tempo, tidak ada pembayaran bunga secara periodik. Keuntungan yang diterima pemegang *bond*dinyatakan oleh tingkat suku bunga yang berlaku pada masa kepemilikan *bond*. Karena itu, tingkat suku bunga sangat berpengaruh dalam penentuan harga *zero couponbond*. Pihak investor atau pembeli *bond*harus mengetahui tentang pergerakan tingkat suku bunga di pasar. Investor juga harus mengetahui bagaimana menentukan harga *zero couponbond* agar tidak membeli *bond*dengan harga yang lebih tinggi dari seharusnya.

Dalam penentuan harga *zero couponbond*dibutuhkan nilai parameter dari model tingkat suku bunga. Pada tugas akhir ini adalah model CIR. Untuk mendapatkan nilai dari parameter model CIR perlu dilakukan proses estimasi. Pada penelitian terdahulu telah dilakukan oleh AR Rizqiyatul Barokah dengan judul “Implementasi Model Cox Ingersoll Ross dalam Mengaproksimasi Tingkat Bunga Harian dan Harga *Zero CouponBond*”. Dalam penelitian ini digunakan metode *Generelized Method of Moment*(GMM) untuk mengestimasi parameter pada model CIR[2]. Dan ada pula penelitian yang telah dilakukan oleh Kamil Kladivko dengan judul “*Maximum Likelihood Estimation of The Cox-Ingersoll-Ross Process: The Matlab Impementation*”. Penelitian ini menggunakan metode Maximum Likelihood Estimation (MLE) untuk mengestimasi model CIR[3].

Metode *Kalman Filter* adalah suatu metode estimasi yang optimal.Metode ini dapat diterapkan pada model *state space*. Parameter pada model tingkat suku bunga CIR bisa diestimasi menggunakan metode *Kalman Filter* dengan cara merubah model CIR ke bentuk *state space*[4].

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka pada tugas akhir ini penulis menggunakan metode *Kalman Filter*untukmengestimasi parameter pada model CIR. Hasil estimasi tersebut selanjutnya digunakan untuk menentukan harga *zero coupon bond*.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. *Model Suku Bunga CIR*

Model tingkat suku bunga CIR merupakan model *equilibrium* yang diperkenalkan pada tahun 1985. Model CIR menjamin tingkat suku bunga bernilai positif dan memiliki sifat *mean reversion* atau mempunyai kecenderungan kembali menuju rata-rata. Bentuk dari model CIR adalah[1]:

$$dr(t) = k\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t) \qquad (1)$$

dengan

$r(t)$: tingkat suku bunga pada waktu t
k : kecepatan $r(t)$ kembali menuju θ

θ : rata-rata jangka panjang tingkat suku bunga
σ : *volatility* dari tingkat suku bunga
$W(t)$: proses Wiener

B. Formula Ito

Misalkan X_t merupakan proses stokastik yang didefinisikan sebagai

$$dX(t) = \mu_t dt + \sigma_t dW(t)$$

dimana$W(t)$ adalah proses Wiener, maka $f(X(t),t)$ juga merupakan proses stokastik yang mempunyai bentuk persamaan diferensial sebagai berikut [6]:

$$df\big(t,X(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial X}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}dt + \frac{\partial f}{\partial t}dt \quad (2)$$

dan Persamaan (2) dapat ditulis sebagai bentuk integral berikut ini:

$$f\big(T,X(T)\big) - f(X(0),0) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial X}dX(t) + \int_0^T \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt$$

C. Zero Coupon Bond

Bond adalah surat hutang yang berisi suatu kontrak hutang yang menjamin penerbit *bond* membayar bunga pada periode tertentu dan melunasi pokok hutang kepada pembeli *bond* pada waktu jatuh tempo.

*Zero coupon bond*adalah suatu kontrak hutang yang dibuat saat t dengan masa jatuh tempo T yang menjamin pembeli *bond* menerima pembayaran bunga dan pokok hutang pada saat T tanpa ada pembayaran secara periodik. Nilai kontrak adalah $t < T$ dan dinotasikan $P(t,T)$. Nilai $P(T,T) = 1$ untuk semua T [6].

Bentuk persmaan zero coupon *bond* yang mengikuti model tingkat suku bunga CIR satu faktor adalah[7]:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \quad (3)$$

dengan:

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(k+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+k)\big(e^{\gamma(T-t)}-1\big)+2\gamma}\right]^{2k\theta/\sigma^2} \quad (4)$$

$$B(t,T) = \frac{2\big(e^{\gamma(T-t)}-1\big)}{(\gamma+k)\big(e^{\gamma(T-t)}-1\big)+2\gamma} \quad (5)$$

$\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$
$r(t)$ =tingkat suku bunga pada waktu t

Tingkat suku bunga majemuk yang berlaku saat t dengan waktu jatuh tempo T dinotasikan dengan $R(t,T)$ dan merupakan laju konstan dimana investasi dari unit $P(t,T)$ saat t akan terus bertambah sampai menghasilkan sejumlah unit pada waktu jatuh tempo T. Dengan rumus[6]:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{\tau(t,T)} \quad (6)$$

dengan:
$P(t,T)$: Harga zero coupon *bond* pada Persamaan (3)
$\tau(t,T)$: $T - t$

D. Ordinary Least Square (OLS)

Ordinary Least Square(OLS) adalah metode estimasi didalam ilmu statistika yang meminimalkan jumlahan kuadrat dari eror[8]. Misalkan diberikan suatu model:

$$Y_t = \theta X_t + e_t, \quad t=1,2,\dots,n \quad (7)$$

Dengan e_t adalah bagian eror dan nilai ekspektasinya adalah nol.$E[e_t] = 0$. Maka estimator untuk koefisien θ pada Persamaan (7) adalah:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2}$$

E. Kalman Filter

Kalman Filter adalah suatu metode estimasi yang optimal. Komponen dasar dari metode *Kalman Filter* adalah persamaan pengukuran dan persamaan transisi. Dengan menggunakan data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi. Secara umum algoritma *Kalman Filter* untuk sistem dinamik linear waktu diskrit adalah[9]:

Model sistem dan model pengukuran:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k$$
$$z_k = H_k x_k + v_k$$
$$x_0 \sim (\bar{x}_0, P_{x_0}), \quad w_k \sim (0, Q_k), \quad v_k \sim (0, R_k)$$

Inisialisasi:

$$P_0 = P_{x_0}, \quad \hat{x}_0 = \bar{x}_0$$

Tahap Prediksi:

estimasi :$\hat{x}_{k+1}^{-} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k$

kovarians eror : $P_{k+1}^{-} = A_k P_k A_k^T + G_k Q_k G_k^T$

Tahap Koreksi:

kalman gain :

$$K_{k+1} = P_{k+1}^{-} H_{k+1}^T \big(H_{k+1} P_{k+1}^{-} H_{k+1}^T + R_{k+1}\big)^{-1}$$

kovarians eror :

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^{-}$$

estimasi :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^{-} + K_{k+1}\big(z_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1}^{-}\big)$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Analisis Model CIR

Pada bagian iniakandibahas mengenai penyelesaian dari model CIR pada Persamaan (1). Karena Persamaan (1) adalah persamaan diferensial stokastik, maka digunakan formula Ito. Dengan menggunakan formula Ito didapatkan penyelesaian model CIR sebagai berikut:

$$r(t+1) = e^{-k\Delta t} r(t) + \theta(1 - e^{-k\Delta t}) + \int_t^{t+1} \sigma e^{k(t+1-u)} \sqrt{r(u)}\, dW(u) \quad (8)$$

Persamaan (8) adalah penyelesaian dari Persamaan (1). Didapatkan penyelesaian rekursif untuk $r(t+1)$ dalam bentuk nilai sebelumnya $r(t)$. Dengan diberikan $\Delta t = (t+1) - t$. Persamaan (8) dapat ditulis dalam bentuk persamaan transisi sebagai berikut

$$r(t+1) = \theta(1 - e^{k\Delta t}) + e^{-k\Delta t} r(t) + \epsilon(t+1) \quad (9)$$

dengan

$$\epsilon(t+1) = \int_t^{t+1} \sigma e^{-k(t+1-u)} \sqrt{r(u)}\, dW(u)$$

Setelah mendapatkan penyelesaian dari model CIR, selanjutnya dicari rata-rata dan varians. Dengan menghitung rata-rata model CIR, bisa dibuktikan sifat *mean reversion* dari model CIR. Rata-rata bisa didapat dengan menghitung ekspektasinya.

$$E[r(t)] = e^{-kt} r(0) + \theta(1 - e^{-kt}) \quad (10)$$

Persamaan (10) adalah rata-rata dari model CIR. Dengan mengambil nilai $t \to \infty$ akan didapatkanlim$_{t\to\infty} E[r(t)] =$

θ. Maka terbukti bahwa model CIR memiliki sifat *mean reversion* karena rata-rata jangka panjangnya adalah θ yang merupakan *mean reversion level*.

Selanjutnya akan dihitung varians dari model CIR. Dengan terlebih dahulu menghitung $E[r^2(t)]$ dan $(E[r(t)])^2$ maka bisa dihitung varians dari suku bunga model CIR.

$$Var(r(t)) = E[r^2(t)] - (E[r(t)])^2$$

$$= r(0)\left(\frac{\sigma^2}{k}\right)(e^{-kt} - e^{-2kt})$$

$$+\theta\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right)(1 - e^{-kt})^2 \qquad (11)$$

Sudah didapatkan penyelesaian, *mean*, dan varians dari model CIR.

B. *Ordinary Least Square (OLS) pada Model CIR*

Nilai awal pada tahap estimasi parameter didapatkan dari metode OLS. Persamaan (1) diubah menjadi bentuk:

$$r_{t+1} - r_t = k(\theta - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t \Delta t}\varepsilon_t \qquad (12)$$

dengan $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Untuk menggunakan OLS, Persamaan (12) ditransformasi ke bentuk:

$$\frac{(r_{t+1} - r_t)}{\sqrt{r_t}} = \frac{k\theta\Delta t}{\sqrt{r_t}} - k\sqrt{r_t}\Delta t + \sigma\varepsilon_t \qquad (13)$$

Dengan meminimalkan jumlahan kuadrat dari bagian eror $\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma\varepsilon_t)^2$ terhadap k dan θakan didapatkan estimator untuk $\hat{k}$dan $\hat{\theta}$ sebagai berikut:

$$\hat{k} = \frac{n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{r_t} - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{r_t} - (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{r_{t+1}}{r_t}}{\left(n^2 - 2n + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{r_t}\right)\Delta t}$$

$$\hat{\theta} = \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{r_{t+1}}{r_t}\sum_{i=1}^{n-1} r_t}{\left(n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{r_t} - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{r_t} - (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{r_{t+1}}{r_t}\right)}$$

Dan estimator untuk $\hat{\sigma}$ adalah:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{(r_{t+1} - r_t)}{\sqrt{r_t}} - \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{r_t}} + \hat{k}\sqrt{r_t}\right)^2}$$

Data yang digunakan dalam proses estimasi parameter ini adalah data suku bunga harian selama 1 tahun untuk *zero coupon bond* dari *Bank of England* sejak 2 Januari 2014 sampai 31 Desember 2014 [10].

Dengan bantuan *software* Matlab, didapatkan hasil estimasi untuk parameter model CIR adalah 1.390 untuk nilai k, 0.012, dan 0.094 untuk nilai σ.

C. *Estimasi Menggunakan Kalman Filter*

Parameter dan *state* yang akan diestimasi adalah k, θ, σ, dan nilai suku bunga harian yang mengikuti model CIR.Data pengukuran yang digunakan adalah data suku bunga harian selama 1 tahun untuk *zero coupon bond*untuk masa jatuh tempo 5 tahun.Model sistem dan model pengukuran untuk algoritma *Kalman Filter* adalah

$$x_{t+1} = Ax_t + w_t$$

dan

$$z_t = Hx_t + D + v_t \qquad (14)$$

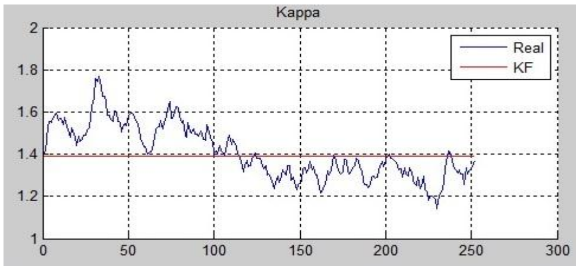
dengan

$$x_t = [k \quad \theta \quad \sigma \quad r]'_t,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-k\Delta t} & 0 & e^{-k\Delta t} \end{bmatrix}$$

$$H = [0 \quad 0 \quad 0 \quad B(t,T)/\tau], \text{ dan } D = -\ln A(t,T)/\tau$$

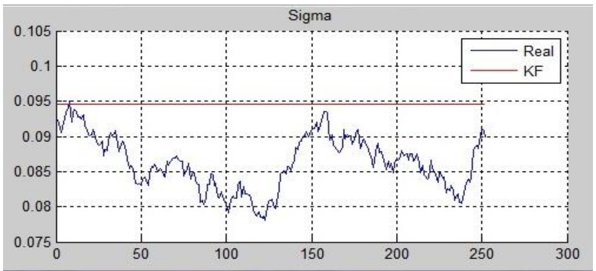
$$A(t,T) = \text{Seperti pada Persamaan (4)}$$
$$B(t,T) = \text{Seperti pada Persamaan (5)}$$

Nilai awal parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan OLS. Sedangkan nilai awal untuk r_t diambil dari data pertama, yakni nilai suku bunga pada tanggal 2 Januari 2014. Dengan bantuan *software* Matlab didapatkan hasil sebagai berikut.

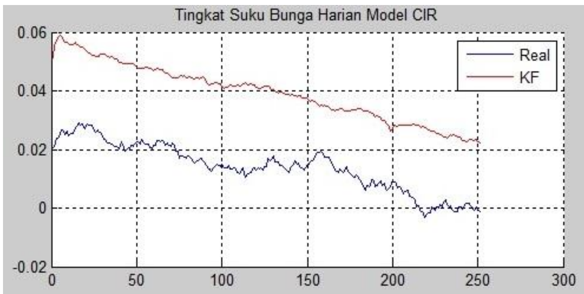


Gambar 1. Hasil estimasi untuk parameter$\boldsymbol{k}$ menggunakan *Kalman Filter*

Gambar 2. Hasil estimasi untuk parameter$\boldsymbol{\theta}$ menggunakan *Kalman Filter*



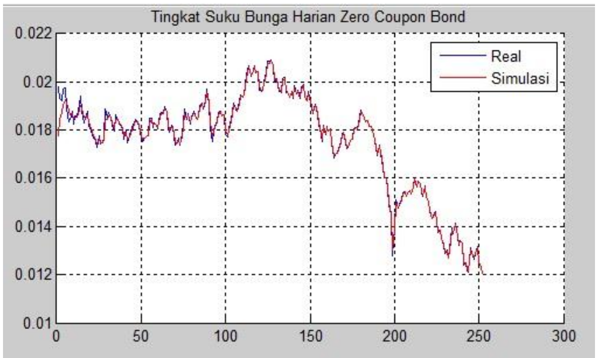
Gambar 3. Hasil estimasi untuk parameter $\boldsymbol{\sigma}$menggunakan *Kalman Filter*



Gambar 4. Hasil estimasi untuk suku bunga harian menggunakan *Kalman Filter*

Dari grafik hasil estimasi yang ditunjukkan pada Gambar 1, Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4 terlihat bahwa hasil estimasi menggunakan *Kalman Filter* untuk parameter k, θ, σ dan $r(t)$ tidak cukup baik. Karena grafik dari nilai estimasi metode *Kalman Filter* belum mendekati grafik nilai dari sistem yang sebenarnya.

Setelah didapatkan hasil estimasi, dilakukan simulasi nilai tingkat suku bunga harian untuk zero coupon bond. Simulasi ini dilakukan untuk dapat melihat perbandingan data real dengan data simulasi yang nilai parameter dan suku bunganya didapatkan dari proses estimasi. Dengan bantuan software Matlab didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar 5. Perbandingan grafik data real tingkat suku bunga harian untuk zero coupon bond dengan data simulasi

Dari Gambar 5 terihat grafik data simulasi yang berwarna merah sangat mendekati grafik data *real* yang berwarna biru dengan rata-rata eror sebesar 0.00017.

D. Estimasi Menggunakan Extended Kalman Filter

Karena persamaan model CIR merupakan persamaan nonlinear, digunakan metode *Extended Kalman Filter* (EKF) untuk mengestimasi parameter dan *state*. Seperti pada metode *Kalman Filter*, parameter dan *state* yang akan diestimasi adalah $k, \theta, \sigma,$ dan nilai suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Model sistem untuk algoritma EKFadalah:

$$x_{t+1} = a(x_t, t) + w_t \tag{15}$$

dengan

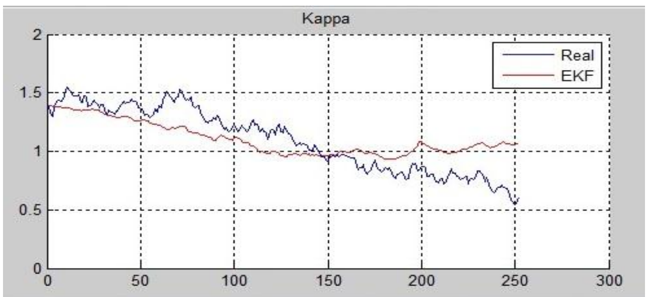
$$x_t = [k \quad \theta \quad \sigma \quad r]'_t \text{ dan } a = \begin{bmatrix} k \\ \theta \\ \sigma \\ (1 - e^{-k\Delta t})\theta + e^{-k\Delta t} r_t \end{bmatrix}.$$

Karena data pengukuran yang digunakan sama dengan data pengukuran saat metode *Kalman Filter*, maka model pengukuran pada EKF sama seperti pada Persamaan (14).

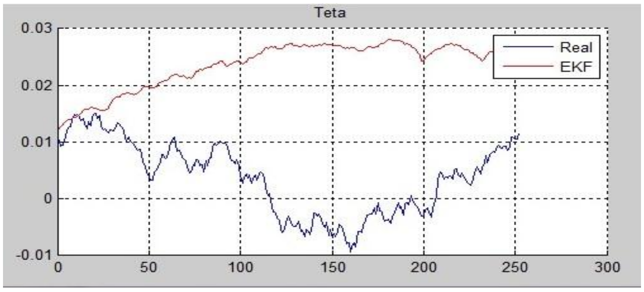
Matriks jacobian untuk $a(x_t, t)$ adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\theta - r)\Delta t e^{-k\Delta t} & 1 - e^{-k\Delta t} & 0 & e^{-k\Delta t} \end{bmatrix}$$

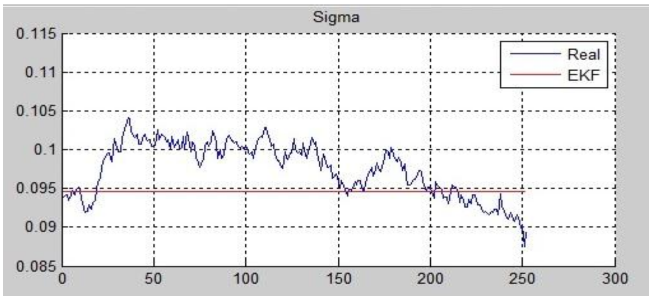
Nilai awal parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan OLS. Sedangkan nilai awal untuk r_t diambil dari data pertama, yakni nilai suku bunga pada tanggal 2 Januari 2014. Dengan bantuan *software* Matlab didapatkan hasil sebagai berikut.



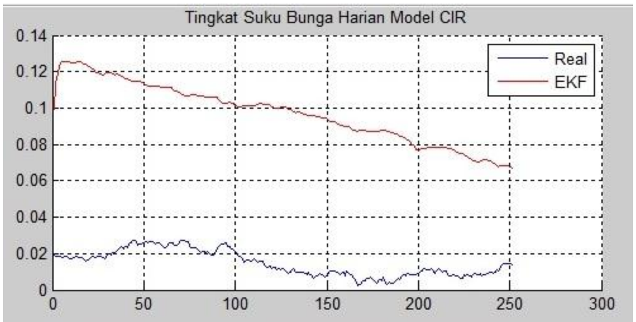
Gambar 6. Hasil estimasi untuk parameter $\boldsymbol{k}$ menggunakan EKF



Gambar 7. Hasil estimasi untuk parameter $\boldsymbol{\theta}$menggunakan EKF



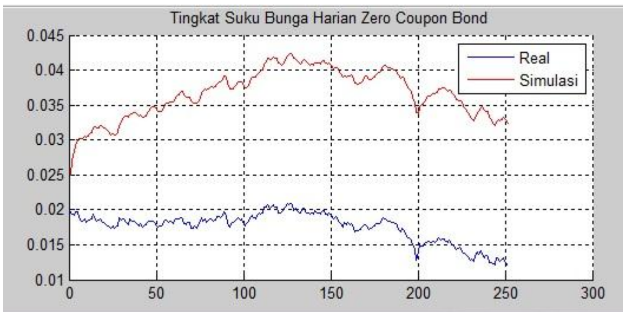
Gambar 8. Hasil estimasi untuk parameter $\boldsymbol{\sigma}$ menggunakan EKF



Gambar 9. Hasil estimasi untuk suku bunga harian menggunakan EKF

Tidak jauh berbeda dengan hasil estimasi menggunakan *Kalman Filter*, estimasi menggunakan *Extended Kalman Filter* juga tidak cukup baik. Jika dilihat dari grafik hasil estimasi pada Gambar 6, Gambar 7, Gambar 8, dan Gambar 9, grafik warna merah yang menunjukkan hasil estimasi dari EKF tidak mendekati grafik warna biru dari sistem yang sebenarnya.

Setelah didapatkan hasil estimasi, dilakukan simulasi nilai tingkat suku bunga harian untuk zero coupon bond. Simulasi ini dilakukan untuk dapat melihat perbandingan data real dengan data simulasi yang nilai parameter dan suku bunganya didapatkan dari proses estimasi. Dengan bantuan software Matlab didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



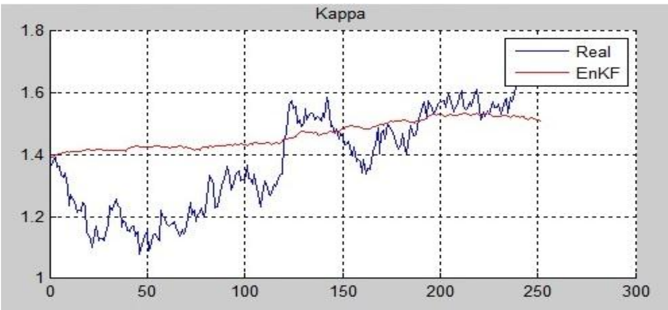
Gambar 6 Perbandingan grafik data real tingkat suku bunga harian untuk zero coupon bond dengan data simulasi

Dari Gambar 10 terlihat bahwa grafik data simulasi yang berwarna merah memiliki perbedaan jauh dengan grafik data *real* yang berwarna biru dengan rata-rata eror sebesar 0.0193.Sehingga dapat dikatakan bahwa hasil estimasi parameter dan suku bunga harian model CIR menggunakan *Extended Kalman Filter* belum cukup baik.

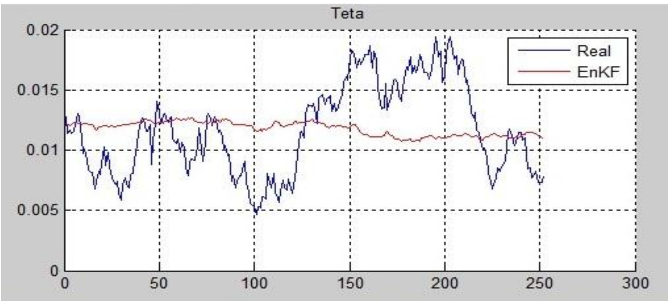
E. Estimasi Menggunakan Ensamble Kalman Filter

Karena persamaan model CIR merupakan persamaan nonlinear, digunakan metode *Ensamble Kalman Filter* (EnKF) untuk mengestimasi parameter dan *state.* Seperti pada metode *Kalman Filter*dan EKF, parameter dan *state* yang akan diestimasi adalah $k, \theta, \sigma,$ dan nilai suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Model sistem untuk algoritma EnKFsama seperti pada EKF yakni Persamaan (15). Sedangkan untuk model pengukuran sama seperti pada Persamaan (14) karena data yang digunakan sama.

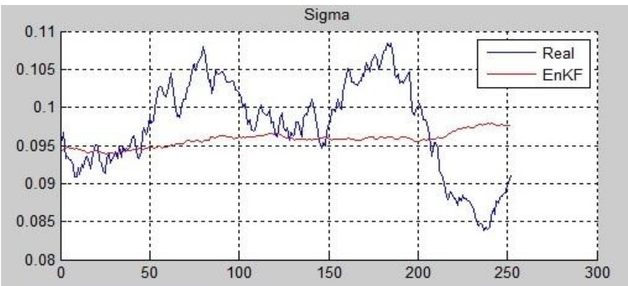
Nilai awal parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan OLS. Sedangkan nilai awal untuk r_t diambil dari data pertama, yakni nilai suku bunga pada tanggal 2 Januari 2014. Dengan melakukan ensamble sebanyak 100 dan dengan bantuan *software* Matlab didapatkan hasil sebagai berikut.



Gambar 11. Hasil estimasi untuk parameter$\boldsymbol{k}$ menggunakan EnKF



Gambar 12. Hasil estimasi untuk parameter $\boldsymbol{\theta}$ menggunakan EnKF

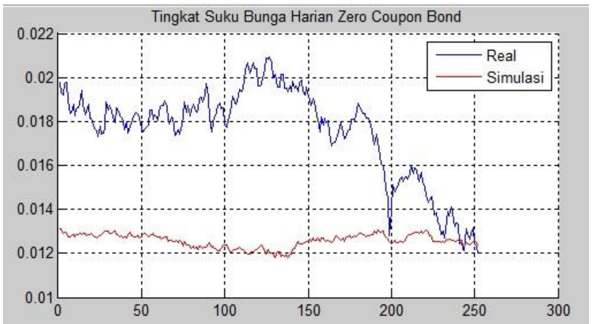


Gambar 13. Hasil estimasi untuk parameter$\boldsymbol{\sigma}$ menggunakan EnKF

Gambar 14. Hasil estimasi untuk suku bunga harian menggunakan EnKf

Dari Gambar 11, Gambar 12, Gambar 13, dan Gambar 14 didapatkan hasil estimasi yang tidak cukup baik untuk parameter dan *state* yang diestimasi. Terlihat dari grafik nilai estimasi metode EnKFbelum mendekati grafik nilai dari sistem yang sebenarnya.

Setelah didapatkan hasil estimasi, dilakukan simulasi nilai tingkat suku bunga harian untuk zero coupon bond. Simulasi ini dilakukan untuk dapat melihat perbandingan data real dengan data simulasi yang nilai parameter dan suku bunganya didapatkan dari proses estimasi. Dengan bantuan software Matlab didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



Gambar 7 Perbandingan grafik data *real* tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond* dengan data simulasi

Dari Gambar 15 terlihat bahwa grafik data simulasi yang berwarna merah memiliki perbedaan jauh dengan grafik data *real* yang berwarna biru dengan rata-rata eror sebesar 0.0193.Sehingga dapat dikatakan bahwa hasil estimasi parameter dan suku bunga harian model CIR menggunakan *Ensemble Kalman Filter* belum cukup baik.

F. Estimasi Tingkat Suku Bunga Harian Menggunakan Kalman Filter

Karena dari estimasi parameter menggunakan metode *Kalman Filter*, EKF, dan EnKF hasil yang didapatkan tidak cukup baik, maka digunakan nilai parameter dari hasil estimasi menggunakan OLS. Yakni 1.390 untuk nilai k, 0.012, dan 0.094 untuk nilai σ.Dengan menggunakan nilai parameter tersebut, dilakukan estimasi tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR menggunakan metode *Kalman Filter.*Nilai awal tingkat suku bunga adalah data pertama tingkat suku bunga pada tanggal 2 Januari 2015 yakni sebesar 0.0198.Model dari sistem adalah bentuk diskrit dari Persamaan (9)sebagai berikut:

$$r_{t+1} = (1 - e^{-k\Delta t})\theta + e^{-k\Delta t} r_t + w_t$$

Model pengukurannya sama seperti pada Persamaan (14).

Dengan menggunakan *software* Matlab didapatkan hasil estimasi untuk tingkat suku bunga harian adalah sebagai berikut:

Gambar 16. Hasil estimasi tingkat suku bunga harian menggunakan metode *Kalman Filter*

Dari Gambar 16 didapatkan hasil estimasi yang baik karena nilainya mendekati nilai suku bunga dari sistem yang sebenarnya. Hasil estimasi ini nantinya akan digunakan untuk simulasi dalam penentuan harga *zero coupon bond*.

G. Simulasi Harga Zero Coupon Bond

Pada Gambar 13 telah didapatkan hasil estimasi dari tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Dengan menggunakan nilai parameter dari metode OLS, dilakukan simulasi harga *zero coupon bond*.Misalkan diambil satu hari yakni tanggal 1 Oktober 2014.Dari hasil estimasi suku bunga harian menggunakan metode *Kalman Filter* didapatkan tingkat suku bunga pada saat itu adalah sebesar 0.0187 atau 1.87%. Selanjutnya menggunakan rumus harga *zero coupon bond* pada Persamaan (3) maka didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:

Gambar 17. Simulasi harga *zero coupon bond* untuk tanggal 1 Oktober 2014 dengan masa jatuh tempo 5 tahun

Hasil simulasi harga *zero coupon bond* pada Gambar 17menunjukkan bahwa harga *bond* mengalami kenaikan dari tahun ke tahun hingga waktu jatuh tempo.

IV. KESIMPULAN

Nilai parameter dari model CIR tidak bisa diestimasi menggunakan metode *Kalman Filter*, *Extended Kalman Filter* dan *Ensamble Kalman Filter*.Dari hasil estimasi didapatkan eror estimasi untuk masing-masing metode adalah sebagai berikut :

Tabel 1. Tabel eror estimasi untuk masing-masing metode

Parameter	OLS	KF	EKF	EnKf
k	-	0.23218	0.45706	0.28074
θ	-	0.01176	0.01414	0.00930
σ	-	0.01044	0.00506	0.00900
$r(t)$	0.00274	0.02336	0.08386	0.00736

Terlihat dari grafik hasil estimasi dan eror estimasi pada Tabel 1bahwa hasil estimasi masih jauh dari nilai yang sebenarnya.Sehingga digunakan hasil estimasi parameter dengan metode OLS sebagai nilai parameter untuk mengestimasi tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR dengan metode *Kalman Filter*.

Dengan menggunakan nilai parameter dari metode OLS. Metode *Kalman Filter* menghasilkan estimasi yang baik untuk tingkat suku bunga harian model CIR. Terlihat dari grafik hasil estimasi dan nilai eror yang kecil.

Dari hasil estimasi tingkat suku bunga harian menggunakan metode *Kalman Filter* dilakukan simulasi harga *zero coupon bond*. Dari hasil simulasi didapatkan bahwa semakin dekat dengan masa jatuh tempo, harga *zero coupon bond* semakin tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Cox J.C., Ingersoll J.E., and Ross S.A. 1985. “A Theory of The Term Structure of Interest Rates”. Econometrica Vol. 53, Issue 2, pp. 385-408.

[2] Barokah AR.R. 2009. “Implementasi Model Cox Ingersoll Ross dalam Mengaproksimasi Tingkat Bunga Harian dan Harga *Zero Coupon Bond*”. Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

[3] Kladivko, K. 2007. “Maximum Likelihood Estimation of The Cox-Ingersoll-Ross *Process*: The Matlab Implementation”. Technical Computing Prague.

[4] Vo, Long H. 2014. “Application of Kalman Filter on Modelling Interest Rates”. Journal of Management Science Vol. 1, pp. 1-15.

[5] Ross, S.M. 2011. “An Elementary Introduction to Mathematical Finance, Third Edition”. New York: Cambridge University Press.

[6] Brigo D., Mercurio F. 2006. “Interest Rate Models – Theory and Practice, second edition”. Germany:Springer-Verlag Berlin Heiderlberg.

[7] Chatterjee, S. 2005. “Application of The Kalman Filter for Estimating Continuous Time Term Structure Models: The Case of UK and Germany”. Department of Economics, University of Glasgow.

[8] Sypkens, R. 2010. “Risk Properties and Parameter Estimation on Mean Reversion and GARCH Model”. University of South Africa.

[9] Lewis, F.L. 1986. “Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory”. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

[10] http://www.bankofengland.co.uk/statistics/Pages/yieldcurve/default.aspx. Diakses pada 17 Maret 2015