

Analisis Eksistensi Kontrol Optimal pada Model Ramsey-Cass-Koopmans dengan Pertumbuhan Jumlah Tenaga Kerja Tidak Konstan

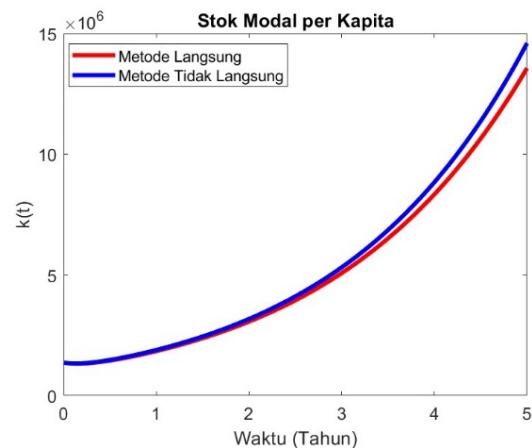
Alvina Dwi Nurcahyani, Subchan, dan Alvian Alif Hidayatullah
Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: subchan@matematika.its.ac.id

Abstrak—Pertumbuhan ekonomi dapat diartikan sebagai kenaikan jangka panjang dalam kemampuan dari suatu negara untuk menyediakan semakin banyak jenis barang-barang ekonomi kepada penduduknya. Peningkatan pengeluaran konsumsi mendorong berkembangnya produksi barang dan jasa. Salah satu faktor yang memengaruhi pengeluaran konsumsi adalah utilitas atau nilai guna yang diperoleh dari kegiatan mengonsumsi barang atau jasa. Sehingga penting untuk mengetahui tingkat utilitas konsumsi dalam suatu produksi. Masalah yang terkait dengan pertumbuhan ekonomi berdasarkan utilitas dapat diselesaikan dengan model Ramsey menggunakan fungsi produksi Cobb-Douglas. Model ini digunakan untuk memaksimalkan utilitas konsumsi yang terikat pada modal melalui kendala dinamis. Oleh karena itu, dilakukan analisa model Ramsey-Cass-Koopmans pada pertumbuhan ekonomi dengan pertumbuhan jumlah tenaga kerja tidak konstan, eksistensi kontrol optimal, kontrol optimal menggunakan Metode Langsung dan Tidak Langsung dengan kontrol berupa konsumsi per kapita, simulasi penyelesaian secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Berdasarkan hasil analisa model didapat bahwa model Ramsey-Cass-Koopmans dengan pertumbuhan tenaga kerja tidak konstan terbukti memiliki solusi positif dan unik, kontrol konsumsi per kapita pada model Ramsey-Cass-Koopmans dengan pertumbuhan tenaga kerja tidak konstan terbukti eksis. Setelah dilakukan kontrol optimal dengan Metode Langsung dan Tidak Langsung, terbukti kontrol berupa konsumsi per kapita dapat memaksimalkan utilitas konsumsi.

Kata Kunci—Pertumbuhan Ekonomi, Model Ramsey-Cass-Koopmans, Eksistensi, Kontrol Optimal.

I. PENDAHULUAN

EKONOMI merupakan bagian dari ilmu sosial yang mempelajari perilaku manusia dalam upaya memenuhi kebutuhan. Kebutuhan manusia beraneka ragam dan akan terus berkembang baik jumlah maupun kualitasnya mengikuti kemajuan peradaban manusia. Dikarenakan sebagian besar perbuatan manusia ditujukan untuk memenuhi kebutuhan hidup, maka ilmu ekonomi dapat dikatakan memegang peranan penting dalam kehidupan sosial [1]. Perkembangan kegiatan dalam perekonomian atau dapat diartikan sebagai pertumbuhan ekonomi dapat menyebabkan barang dan jasa yang diproduksi dalam masyarakat terus bertambah dan kemakmuran masyarakat meningkat. Pertumbuhan ekonomi adalah kenaikan jangka panjang dalam kemampuan dari suatu negara untuk menyediakan semakin banyak jenis barang-barang ekonomi kepada penduduknya [2]. Aspek yang perlu diperhatikan dalam sebuah perekonomian diantaranya modal, tenaga kerja dan konsumsi. Modal merupakan faktor yang menentukan besarnya produksi. Dalam Ilmu Ekonomi modal adalah tiap-tiap hasil (produk) yang digunakan untuk menghasilkan produk selanjutnya [3]. Menurut Todaro,



Gambar 1. Laju perubahan stok modal per kapita dengan metode langsung dan tidak langsung.

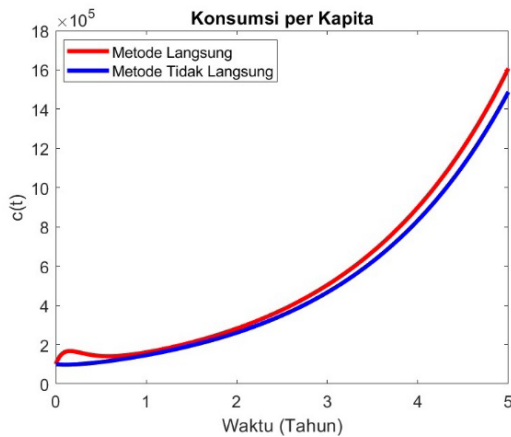
pertumbuhan tenaga kerja secara tradisional dianggap sebagai faktor positif yang memacu pertumbuhan ekonomi. Jumlah tenaga kerja yang besar berarti akan menambah jumlah tenaga yang produktif [3]. Sedangkan konsumsi adalah kegiatan untuk menghabiskan atau menggunakan hasil produksi. Peningkatan pengeluaran konsumsi akan mendorong berkembangnya produksi barang dan jasa untuk memenuhi kebutuhan konsumsi tersebut [4].

Salah satu faktor yang mempengaruhi konsumsi adalah utilitas. Utilitas adalah nilai guna atau kebermanfaatannya yang diperoleh dari kegiatan mengonsumsi barang atau jasa [5]. Masalah terkait utilitas ini dapat diselesaikan menggunakan teori kontrol optimal. Kontrol optimal adalah salah satu contoh penerapan ilmu matematika yang bertujuan untuk menentukan pengendalian sinyal yang bekerja pada suatu proses sebagai respons terhadap kendala fisik, sedangkan nilai optimalnya dapat ditentukan sesuai dengan indeks kinerja atau fungsi tujuan [6]. Dalam masalah pertumbuhan ekonomi banyak digunakan kontrol optimal dengan model Ramsey. Model Ramsey merupakan salah satu model pertumbuhan ekonomi neoklasik. Dalam teori neoklasik, pertumbuhan ekonomi bergantung pada peningkatan dan penawaran faktor produksi dan tingkat kemajuan teknologi, karena perekonomian akan terus mengalami tingkat kesempatan kerja penuh dan kapasitas sarana modal akan digunakan secara penuh dari waktu ke waktu. Model Ramsey bertujuan untuk memaksimalkan utilitas konsumsi yang terikat terhadap modal melalui kendala dinamis [7].

Dalam upaya meningkatkan utilitas dari konsumsi maka dilakukan optimasi terhadap model Ramsey. Oleh karena itu, dilakukan analisa model Ramsey-Cass-Koopmans pada pertumbuhan ekonomi dengan pertumbuhan jumlah tenaga kerja tidak konstan. Pertumbuhan jumlah tenaga kerja

Tabel 2.
Nilai awal variabel model *ramsey-cas-koopmans*

Variabel	Keterangan	Nilai
$K(0)$	Stok modal pada waktu 0	15000000
$L(0)$	Jumlah tenaga kerja pada waktu 0	11



Gambar 3. Tingkat pemberian kontrol optimal c dengan metode langsung dan tidak langsung.

diasumsikan tidak bersifat terbatas atau konvergen. Jumlah tenaga kerja dapat meningkat atau menurun selama tetap positif. Kemudian, dibuktikan eksistensi dan ditentukan kontrol optimal dengan kontrol berupa konsumsi per kapita. Kontrol optimal diselesaikan menggunakan dua metode yaitu Metode Langsung dan Tidak Langsung dengan penyelesaian numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Metode Runge-Kutta orde 4 biasa digunakan pada penelitian sebelumnya dan memiliki tingkat akurasi yang tinggi sehingga digunakan metode Runge-Kutta orde 4 untuk simulasi penyelesaian numerik.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Pertumbuhan Ekonomi

Pertumbuhan ekonomi mencerminkan peningkatan aktivitas ekonomi di suatu negara yang menyebabkan peningkatan produksi barang dan jasa dalam masyarakat, serta meningkatkan kesejahteraan masyarakat dalam jangka waktu yang lama. Terdapat beberapa teori mengenai pertumbuhan ekonomi. Salah satunya teori pertumbuhan ekonomi neoklasik. Dalam analisis neoklasik, pertumbuhan ekonomi bergantung pada peningkatan dan penawaran faktor produksi dan tingkat kemajuan teknologi, karena perekonomian akan terus mengalami tingkat kesempatan kerja penuh dan kapasitas sarana modal akan digunakan secara penuh dari waktu ke waktu [8]. Teori ekonomi neoklasik didasarkan pada fungsi produksi yang telah dikembangkan oleh Charter Cobb dan Paul Douglas yang dikenal dengan fungsi produksi Cobb-Douglas. Fungsi produksi Cobb-Douglas dapat dituliskan sebagai berikut [7]:

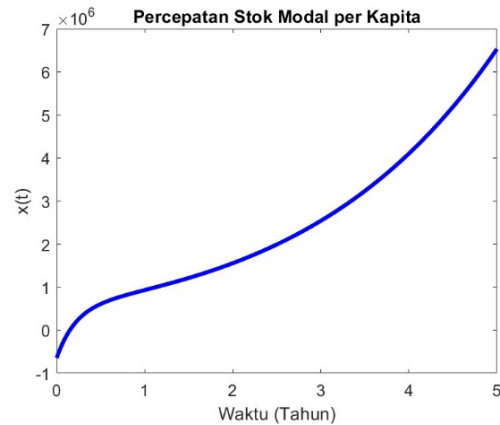
$$Y(t) = AK(t)^\alpha L(t)^\beta \tag{1}$$

dimana,

- $Y(t)$: Hasil produksi pada waktu t
- $K(t)$: Stok modal pada waktu t
- $L(t)$: Jumlah tenaga kerja pada waktu t
- A : Faktor kemajuan teknologi
- α : Elastisitas *output* modal

Tabel 1.
Nilai parameter model *ramsey-cass-koopmans*

Parameter	Keterangan	Nilai
A	Faktor kemajuan teknologi	0.7
δ	Tingkat penyusutan modal	0.1
ρ	Faktor diskon	0.02
$n(t)$	Tingkat pertumbuhan jumlah tenaga kerja	e^{-5t}



Gambar 2. Percepatan laju perubahan stok modal per kapita dengan metode langsung.

β : Elastisitas *output* tenaga kerja

B. Model Ramsey

Model Ramsey adalah model neoklasik pertumbuhan ekonomi yang idenya adalah menentukan tingkat tabungan secara endogen melalui proses maksimalisasi secara dinamis [9]. Model Ramsey digunakan dalam masalah teori kontrol optimal untuk memaksimalkan utilitas konsumsi yang terkait dengan modal melalui kendala dinamis. Persamaan model Ramsey yang diperkenalkan oleh F. P. Ramsey pada tahun 1928 adalah sebagai berikut [10]:

$$\frac{dK(t)}{dt} + C(t) = F(L(t), K(t))$$

dengan,

- $F(L(t), K(t))$: Hasil produksi pada waktu t
- $K(t)$: Stok modal pada waktu t
- $C(t)$: Konsumsi pada waktu t
- $L(t)$: Jumlah tenaga kerja pada waktu t

Model Ramsey selanjutnya diperluas oleh David Cass dan Tjalling Koopmans yang kemudian sering disebut sebagai model Ramsey-Cass-Koopmans [11]. Model Ramsey-Cass-Koopmans yang digunakan adalah sebagai berikut [7]:

$$\dot{K}(t) = Y(t) - \delta K(t) - C(t) \tag{2}$$

dimana,

- $Y(t)$: Hasil produksi pada waktu t
- $K(t)$: Stok modal pada waktu t
- $C(t)$: Konsumsi pada waktu t
- δ : Tingkat penyusutan modal

Untuk memaksimalkan utilitas konsumsi, maka fungsi objektif yang digunakan pada model ini yakni:

$$J(c) = \int_0^\infty \ln c(t)e^{-\rho t} dt \tag{3}$$

C. Eksistensi Kontrol Optimal

Solusi terbatas dari kendala pada persamaan 2 untuk interval waktu yang terbatas digunakan untuk membuktikan eksistensi kontrol optimal. Eksistensi dari kontrol optimal

dapat dicari dengan menggunakan hasil dari Fleming dan Rishel.

Teorema 1. Berdasarkan masalah kontrol pada persamaan 3 dengan kendala pada persamaan 2 dan diberikan kontrol c yang eksis sedemikian sehingga [12]:

$$\min J(c) = J(c^*) \quad (4)$$

Berikut beberapa kondisi yang harus dipenuhi agar kontrol optimal dapat dikatakan eksis.

1. Himpunan kontrol \mathcal{C} bukan himpunan kosong.
2. Himpunan kontrol \mathcal{C} konveks dan tertutup.

Definisi 1. Suatu himpunan $K \subset R^n$ dikatakan konveks jika $K = \emptyset$, atau setiap kali kita mengambil dua titik dalam K , garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut seluruhnya terdapat dalam K , yaitu [13]:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K, \forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_2 \in K$$

3. Ruas kanan (*Right Hand Side*) dari sistem dinamik kontinu terbatas oleh fungsi linear pada *state* dan kontrol optimal.
4. Integrand dari fungsi objektif konveks pada \mathcal{C} dan terbatas.

Teorema 2. Sebuah fungsi $f(x)$ bernilai riil terdiferensiasi pada selang terbuka adalah konveks jika dan hanya jika turunan pertamanya f' adalah fungsi tidak turun. Sebuah fungsi $f(x)$ bernilai riil yang terdiferensiasi dua kali pada selang terbuka adalah konveks jika dan hanya jika turunan keduanya f'' tidak negatif sepanjang selang ini [14].

D. Teori Kontrol Optimal

Pada prinsipnya kontrol optimal bertujuan untuk mencari fungsi kontrol $u(t)$ yang dapat memaksimalkan indeks performansi. Formulasi indeks performansi adalah sebagai berikut:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (5)$$

dengan kendala:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

dengan t_0 dan t_f masing-masing adalah waktu awal dan akhir pemberian kontrol, sedangkan V dan S adalah fungsi skalar. Kontrol $u^*(t)$ merupakan nilai fungsi kontrol optimalnya, jika dapat memaksimalkan indeks performansi [15].

1) Metode Langsung

Untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal menggunakan Metode Langsung dengan mengeliminasi $u(t)$ antara kendala pada persamaan 6 dan indeks performansi pada persamaan 5 sehingga diperoleh:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (7)$$

Selanjutnya menerapkan fungsi Euler-Lagrange.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \quad (8)$$

2) Metode Tidak Langsung

Untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal dengan Metode Tidak langsung adalah dengan membentuk fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$\mathcal{H} = V(x(t), u(t)) + \lambda(t)f(x(t), u(t), t) \quad (9)$$

Kondisi yang diperlukan agar lintasan menjadi optimal untuk masalah maksimum berdasarkan kriteria dalam Teorema 3 berikut:

Teorema 3. Misalkan (x^*, u^*) menjadi lintasan optimal untuk masalah maksimasi sesuai dengan kriteria. Selanjutnya terdapat konstan $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ dan sebuah fungsi yang dapat diturunkan secara sepotong-sepotong $\lambda: 1 \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $t \geq t_0$ berlaku [7]:

$$(\bar{\lambda}, \lambda(t)) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t), \bar{\lambda}) = 0 \quad (10)$$

dan untuk setiap $t > 0$ kecuali untuk titik diskontinu dari u^* , berlaku:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t), \bar{\lambda}) \quad (11)$$

E. Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan suatu algoritma yang diterapkan untuk menemukan solusi masalah nilai awal dalam persamaan diferensial. Keunggulan dari metode ini yaitu memberikan ketelitian yang lebih tinggi dan tidak memerlukan perhitungan turunan dari fungsi yang terlibat [16]. Jenis metode Runge-Kutta yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde 4. Model matematika yang disimulasikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat adalah model matematika yang telah dikontrol secara optimal. Secara matematika dapat ditulis sebagai berikut [17]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Penyelesaian Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (12)$$

dimana,

$$k_1 = f(t_n, x_n) \quad (13)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1) \quad (14)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2) \quad (15)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3) \quad (16)$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah sistematis dalam proses penelitian ini dimulai dari mengidentifikasi model Ramsey-Cass-Koopmans yang digunakan. Lalu menganalisa kepositifan dan keunikan model Ramsey-Cass-Koopmans dan eksistensi kontrol optimalnya. Dimana variabel kontrol yang diberikan berupa konsumsi per kapita. Setelah itu, menentukan penyelesaian kontrol optimal model Ramsey-Cass-Koopmans menggunakan Metode Langsung dan Tidak Langsung. Selanjutnya mensimulasikan persamaan secara numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dengan

Matlab. Kemudian, dilakukan analisa hasil simulasi model Ramsey-Cass-Koopmans. Kemudian, dilakukan penarikan kesimpulan dan diberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Ramsey-Cass-Koopmans

Model matematika yang digunakan adalah model matematika yang terdapat pada penelitian yang berjudul "Ramsey model with non-constant population growth" oleh Kajanovicova et al. Adapun model Ramsey-Cass-Koopmans yang digunakan adalah sebagai berikut [7]:

$$\dot{K}(t) = Y(t) - \delta K(t) - C(t) \tag{17}$$

Fungsi produksi diasumsikan menggunakan tipe Cobb Douglas yaitu:

$$Y(t) = AK(t)^\alpha L(t)^\beta$$

Jumlah tenaga kerja mengalami pertumbuhan secara eksponensial dengan tingkat pertumbuhan tidak konstan n diberikan oleh:

$$n(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = e^{-5t} \tag{18}$$

Didefinisikan stok modal per kapita $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, konsumsi per kapita $c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}$, hasil produksi per kapita $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = Ak(t)^\alpha L(t)^{\alpha+\beta-1}$ dengan $\alpha = 1, \beta = 0$.

Sehingga persamaan 17 menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= y(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) - c(t) \\ \dot{k}(t) &= (A - \delta - n(t))k(t) - c(t) \end{aligned} \tag{19}$$

dengan $k(0) = k_0$.

Fungsi objektif dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$J(c) = maks \int_0^\infty \ln c(t) e^{-\rho t} dt \tag{20}$$

B. Kepositifan dan Keunikan

Dapat dilihat dari persamaan dinamik 19 bahwa model dikatakan valid jika memiliki solusi positif untuk setiap saat t . Hal ini berarti, jika model memiliki kondisi awal $k(t_0) > 0$ maka $k(t) > 0$ untuk setiap $t > t_0$. Pertama, akan ditunjukkan bahwa persamaan 19 valid. Misalkan himpunan.

$$\Omega_{(k(t_0))} := \{k(t) | t_0 \leq t \leq t_f, k(t) > 0\} \tag{21}$$

Jika kondisi awal pada persamaan 19 memenuhi $k(t_0 = 0) > 0$, maka dapat dikatakan persamaan 19 valid jika himpunan $\Omega_{(k(t_0))}$ merupakan himpunan invarian positif. Definisi invarian positif dapat diberikan sebagai berikut [2]:

Definisi 2. (Himpunan invarian positif) Diberikan sebuah persamaan diferensial $k' = f(k)$, sebuah himpunan $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ adalah invarian positif jika dan hanya jika tidak ada solusi yang berawal dari S yang dapat meninggalkan Ω di masa yang akan datang, yaitu ketika hal berikut berlaku [18].

$$\forall k \in \Omega, \forall t \geq 0, \phi[t, k] \in \Omega$$

Untuk menunjukkan bahwa persamaan 20 adalah himpunan invarian positif, dapat dibuktikan dengan Teorema

4 berikut:

Teorema 4. Misalkan

$$\Omega_{(k(t_0))} := \{k(t) | t_0 \leq t \leq t_f, k(t) > 0\}$$

himpunan bagian dari semua solusi dari model (19) dengan kondisi awal $k(t_0 = 0)$. Jika $k(t_0) > 0$ maka $\Omega_{(k(t_0))}$ adalah himpunan invarian positif.

Bukti:

$$\dot{k}(t) = y(t) - c(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) \tag{22}$$

dengan kondisi awal $k(t_0) > 0, k(t_0) \in \Omega$, maka harus dibuktikan untuk kondisi lain yaitu $k(t) \in \Omega, \forall t_0 \leq t \leq t_f$, dimana $k(t)$ fungsi kontinu pada $[t_0, t_f]$ [19].

Diketahui dari jurnal yang berjudul "Some Facts about the Ramsey Model" bahwa [20]:

$$c(t) = (1 - s(t))y(t)$$

Dimana $s(t)$ menyatakan investasi berupa sebagian dari produksi saat ini yang disimpan dan diinvestasikan dalam pertumbuhan modal pada waktu t dengan:

$$s(t) < 1$$

Sehingga,

$$c(t) = (1 - s(t))y(t)$$

$$s(t)y(t) = y(t) - c(t)$$

Dengan demikian persamaan 21 ekuivalen dengan:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= y(t) - c(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) \\ &= s(t)y(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) \\ &= s(t)Ak(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) \\ &> -\delta k(t) - n(t)k(t), (s(t) < 1, k(t) > 0) \end{aligned} \tag{23}$$

Perhatikan bahwa n fungsi linier sehingga terdapat $m > 0$ sedemikian hingga

$$n(t) \leq |n(t)| \leq m, \quad \forall t \in [0, t_f)$$

dengan demikian didapat bahwa

$$\begin{aligned} n(t) &\leq m \\ n(t)k(t) &\leq mk(t), \quad k(t) > 0, \forall t \in [0, t_f) \end{aligned}$$

$$-n(t)k(t) \geq -mk(t)$$

$$\dot{k}(t) \geq -\delta k(t) - n(t)k(t) \geq -\delta k(t) - m(t)k(t)$$

$$\dot{k}(t) \geq -\delta k(t) - mk(t)$$

$$\dot{k}(t) + \delta k(t) + mk(t) \geq 0$$

$$\dot{k}(t) + (\delta + m)k(t) \geq 0$$

$$e^{(\delta+m)t} \dot{k}(t) + e^{(\delta+m)t} (\delta + m)k(t) \geq 0$$

$$\frac{d}{dt} (e^{(\delta+m)t} k(t)) \geq 0$$

$$\int_0^{t^*} \frac{d}{dt} (e^{(\delta+m)t} k(t)) dt \geq 0$$

$$e^{(\delta+m)t^*} k(t^*) - k(0) \geq 0$$

$$e^{(\delta+m)t^*} k(t^*) \geq k(0)$$

$$k(t^*) \geq k(0)e^{-(\delta+m)t^*}$$

dari persamaan 23 diperoleh bahwa $k(t^*) \geq k(0)e^{-(\delta+m)t^*} \geq 0$. Tetapi ini kontradiksi dengan pernyataan $k(t^*) \leq 0$, sehingga dari sini dapat disimpulkan bahwa $k(t) \geq 0$ untuk setiap $t \in [0, t_f]$.

Dari pembuktian diatas, diperoleh bahwa persamaan 21 adalah himpunan invarian positif sehingga model 19 valid.

Telah dibuktikan bahwa himpunan $\Omega(k(t_0))$ yang didefinisikan pada persamaan 21 adalah himpunan invarian positif. Hal ini berarti bahwa jika kondisi awal pada model 19 dengan kontrol bernilai positif, maka solusi dari model tersebut bernilai positif untuk setiap interval waktu t . Akan tetapi, tidak menjamin bahwa model ini memiliki solusi tunggal yang diberikan untuk sebuah kondisi awal. Sehingga harus ditunjukkan apakah solusi model 19 dengan kontrol memiliki solusi tunggal atau tidak. Model 19 memiliki solusi tunggal untuk setiap kondisi awal yang positif. Hal ini seperti yang diberikan dalam Teorema 5 berikut:

Teorema 5. Model Ramsey-Cass-Koopmans dengan kontrol pada persamaan 19 yang memenuhi kondisi awal yang diberikan $k(t_0) > 0$ mempunyai solusi yang unik [19].
Bukti. Misalkan

$$\varphi(k(t)) = \dot{k}(t)$$

Model Ramsey-Cass-Koopmans dengan kontrol dapat ditulis sebagai

$$\varphi(k(t)) = Ak(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) - c(t)$$

akan ditunjukkan bahwa $\varphi(k(t))$ mempunyai solusi yang unik dengan kondisi awal $k(0) > 0$.

$$\begin{aligned} |\varphi(k_1(t)) - \varphi(k_2(t))| &= |Ak_1(t) - \delta k_1(t) - n(t)k_1(t) \\ &\quad - c(t) - Ak_2(t) - \delta k_2(t) - n(t)k_2(t) - c(t)| \\ &= |A(k_1(t) - k_2(t)) - \delta(k_1(t) - k_2(t)) \\ &\quad - n(t)(k_1(t) - k_2(t))| \\ &= |(A - \delta - n(t))(k_1(t) - k_2(t))| \\ &= |A - \delta - n(t)||k_1(t) - k_2(t)| \end{aligned}$$

karena n fungsi linier didapat bahwa terdapat $M > 0$ sehingga

$$|A - \delta - n(t)| < M$$

sehingga,

$$\begin{aligned} |\varphi(k_1(t)) - \varphi(k_2(t))| &= |A - \delta - n(t)||k_1(t) - k_2(t)| \\ &< M|k_1(t) - k_2(t)| \end{aligned}$$

diperoleh bahwa $\varphi(k(t))$ adalah fungsi Lipschitz. Dari sini didapat:

$$k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(k(t)) dt$$

sehingga terbukti k memiliki solusi unik untuk kondisi awal $k(t_0) > 0$.

C. Eksistensi Kontrol Optimal

Solusi terbatas dari kendala 19 untuk interval waktu yang terbatas digunakan untuk membuktikan eksistensi kontrol optimal. Eksistensi dari kontrol optimal dapat dibuktikan menggunakan hasil dari Fleming dan Rishel. Berdasarkan Teorema 1 disebutkan fungsi objektif yang digunakan adalah:

$$\min J(c) = J(c^*)$$

sedangkan pada permasalahan model Ramsey-Cass-Koopmans ini fungsi objektif yang ditentukan yaitu:

$$\max J(c) = J(c^*)$$

sehingga untuk menyesuaikan dengan Teorema 1 untuk membuktikan eksistensi kontrol optimal menggunakan:

$$\min -J(c) = -J(c^*)$$

Bukti. Berikut beberapa kondisi yang harus dipenuhi agar kontrol optimal dapat dikatakan eksis.

1) Himpunan Kontrol \mathcal{C} Bukan Himpunan Kosong

Himpunan \mathcal{C} didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{C} = \{c | c(t) > 0, \forall t \in [0, t_f]\}$$

adalah bukan himpunan kosong.

Ini dapat dilihat dari Teorema 4 dan Teorema 5 dimana setiap kontrol $c \in \mathcal{C}$ mempunyai solusi positif dan unik. Sehingga dapat disimpulkan himpunan \mathcal{C} bukan himpunan kosong.

2) Himpunan Kontrol \mathcal{C} Konveks Dan Tertutup

Sebagai akibat dari hasil persamaan 1 terjamin bahwa kontrol tidak kosong, sehingga memungkinkan untuk melakukan analisis mengenai sifat kontrol tersebut yakni konveks dan tertutup. Himpunan \mathcal{C} didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{C} = \{c | c(t) > 0, \forall t \in [0, t_f]\}$$

adalah himpunan konveks dan tertutup.

Untuk menunjukkan bahwa himpunan \mathcal{C} adalah himpunan konveks dan tertutup, misalkan $v = (c_1, c_2) \in \mathcal{C}$. Mudah dilihat bahwa $c_1(t), c_2(t) > 0$ untuk $t \in [0, t_f]$ sehingga setiap $\lambda \in [0, 1]$ diperoleh:

$$\lambda c_1(t) + (1 - \lambda)c_2(t) > 0; t \in [0, t_f]$$

Untuk membuktikan, ambil c_1 dan c_2 elemen di \mathcal{C} sehingga berlaku:

$$c_1(t) > 0 \tag{24}$$

$$c_2(t) > 0 \tag{25}$$

kalikan semua ruas pada persamaan 24 dengan $(1 - \lambda)$ dan persamaan 25 dengan λ sehingga:

$$(1 - \lambda)c_1(t) + \lambda c_2(t) > 0 \tag{26}$$

$$\lambda c_2(t) > 0 \tag{27}$$

jumlahkan persamaan 26 dan 27 sehingga didapat:

$$(1 - \lambda)c_1(t) + \lambda c_2(t) > 0$$

misalkan $(1 - \lambda)c_1(t) + \lambda c_2(t)$ adalah $c_3(t)$ maka

$$c_3(t) > 0$$

ini berarti $c_3 \in \mathcal{C}$ maka $(1 - \lambda)c_1(t) + \lambda c_2(t) \in \mathcal{C}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa himpunan kontrol \mathcal{C} konveks.

Untuk menunjukkan bahwa \mathcal{C} adalah himpunan tertutup, cukup dengan menunjukkan bahwa untuk setiap barisan konvergen $c_n \subseteq \mathcal{C}$ memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \mathcal{C}$. Pernyataan ini ekuivalen ke c_n adalah barisan konvergen dengan $x = (\lim_{n \rightarrow \infty} c_n) \in \mathcal{C}$. Sekarang definisikan:

$$\|c_n - c\| := \sup_{t \in [0, t_f]} |c_n(t) - c(t)|$$

Kemudian, diketahui bahwa c_n adalah barisan konvergen sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga:

$$\|c_n - c\| < \epsilon$$

untuk setiap $n \geq K(\epsilon)$. Dari sini didapat:

$$\|c_n - c\| < \epsilon$$

$$\sup_{t \in [0, t_f]} |c_n(t) - c(t)| < \epsilon$$

$$|c_n(t) - c(t)| < \sup_{t \in [0, t_f]} |c_n(t) - c(t)| < \epsilon$$

$$|c_n(t) - c(t)| < \epsilon$$

$$-\epsilon < c_n(t) - c(t)$$

$$-\epsilon < c(t) - c_n(t)$$

$$-\epsilon < -\epsilon + c_n(t) < c(t)$$

$$-\epsilon < c(t)$$

Karena memenuhi untuk setiap $\epsilon > 0$, didapat $c(t) > 0$. Dari sini diperoleh $c(t) \in \mathcal{C}$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa \mathcal{C} adalah himpunan tertutup. Jadi, terbukti bahwa himpunan kontrol \mathcal{C} konveks dan tertutup.

3) Ruas Kanan (Right Hand Side) Pada Model Dinamik Kontinu Terbatas Oleh Fungsi Linier Pada State Dan Kontrol Optimal

Berdasarkan model 19:

$$\dot{k}(t) = (A - \delta - n(t))k(t) - c(t)$$

terlihat bahwa ruas kanan (Right Hand Side) dari model adalah fungsi linier pada state dan kontrol optimal. Diketahui bahwa n dan k merupakan fungsi kontinu dan $c(t)$ merupakan fungsi terbatas sehingga fungsi $(A - \delta - n(t))k(t) - c(t)$ terbatas.

4) Integrand dari Fungsi Objektif Konveks pada \mathcal{C} dan Terbatas

Fungsi $I: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai:

$$I(c) = -\ln c(t)e^{-\rho t}$$

Untuk menunjukkan bahwa $I(c)$ adalah fungsi konveks terhadap kontrol c . Perhatikan bahwa

$$\frac{d}{dc}(I(c)) = -e^{-\rho t} \frac{1}{c(t)}$$

$$\frac{d^2}{dc^2}(I(c)) = e^{-\rho t} \frac{1}{c^2(t)}$$

Selanjutnya diperoleh bahwa

$$\frac{d^2}{dc^2}(I(c)) = e^{-\rho t} \frac{1}{c^2(t)} \geq 0$$

Berdasarkan Teorema 2 dapat disimpulkan bahwa $I(c)$ adalah fungsi konveks terhadap c .

Selanjutnya, perhatikan bahwa kontrol c positif $c(t) > 0$. Dengan menggunakan batasan waktu dari 0 sampai t_f maka $c(t)$ terbatas karena c kontinu. Akibatnya $-\ln c(t)$ juga terbatas sehingga integrandnya juga terbatas.

D. Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada penelitian ini, tujuan yang ingin diperoleh yaitu untuk memaksimalkan utilitas dari konsumsi dengan kontrol berupa konsumsi per kapita. Fungsi objektif yang akan dimaksimalkan yaitu:

$$J(c) = \int_0^\infty \ln c(t)e^{-\rho t} dt \tag{28}$$

dengan kendala,

$$\dot{k}(t) = Ak(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) - c(t) \tag{29}$$

dan kondisi awal:

$$k(0) = k_0$$

dimana variabel kontrol diberikan sebagai berikut:

$$c(t) > 0$$

Rasio ini berfungsi untuk mengetahui seberapa besar perusahaan dibiayai oleh hutang.

1) Metode Langsung

Metode langsung fokus pada pendekatan langsung untuk menemukan solusi numerik dari masalah kontrol optimal [21]. Pendekatan ini mengubah masalah kontrol optimal menjadi masalah optimasi numerik yang dapat dipecahkan dengan algoritma optimasi. Penyelesaian kontrol optimal menggunakan Metode Langsung dengan mengeliminasi $c(t)$ antara fungsi objektif persamaan 28 dengan kendala persamaan 29 sehingga diperoleh:

$$c(t) = Ak(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) - \dot{k}(t)$$

dan

$$J(c) = \int_0^\infty \ln(Ak(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) - \dot{k}(t))e^{-\rho t} dt$$

dimana

$$V = \ln(Ak(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) - \dot{k}(t))e^{-\rho t}$$

Dengan menerapkan persamaan Euler-Lagrange

$$\left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{k}}\right)_* = 0$$

ke fungsi $J(c)$ diperoleh:

$$\dot{k}^*(t) + (-2A + 2\delta + 2n(t) + \rho)k^*(t) +$$

$$(-2A\delta - 2An(t) + \delta^2 + 2\delta n(t) + (n(t))^2$$

$$-A\rho + \rho\delta + \rho n(t) + \dot{n}(t))k^*(t) = 0 \quad (30)$$

dengan memisalkan $x(t) = \dot{k}^*(t)$ dan $\dot{x}(t) = \ddot{k}^*(t)$, sehingga diperoleh persamaan diferensial orde 1

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + (-2A + 2\delta + 2n(t) + \rho)x(t) + \\ (-2A\delta - 2An(t) + \delta^2 + 2\delta n(t) + (n(t))^2 - A\rho \\ + \rho\delta + \rho n(t) + \dot{n}(t))k^*(t) = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh sistem persamaan dinamik orde 1 yaitu:

$$\dot{k}^*(t) = x(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -(-2A + 2\delta + 2n(t) + \rho)x(t) \\ -(-2A\delta - 2An(t) + \delta^2 + 2\delta n(t) \\ + (n(t))^2 - A\rho + \rho\delta + \rho n(t) + \dot{n}(t))k^*(t) \quad (31) \end{aligned}$$

Dari persamaan 31 didapat kontrol optimal sebagai berikut:

$$c^*(t) = Ax(t) - \delta x(t) - n(t)x(t) - \dot{x}(t)$$

2) Metode Tidak Langsung

Metode Tidak Langsung menggunakan pendekatan teoritis yang melibatkan fungsi Hamiltonian dan kondisi transversal [22]. Pendekatan metode ini berfokus pada penurunan persamaan-persamaan diferensial yang mewakili sifat-sifat optimal dari persamaan kontrol. Dalam penyelesaian kontrol optimal menggunakan Tidak Langsung langkah pertama yang harus dikerjakan adalah membentuk fungsi Hamiltonian, diperoleh:

$$\mathcal{H} = \ln c(t)e^{-\rho t} + \lambda(t)[Ak(t) - \delta k(t) - n(t)k(t) - c(t)]$$

Dari Teorema 3 diketahui bahwa:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0$$

$$\frac{e^{-\rho t}}{c(t)} - \lambda(t) = 0$$

$$c^*(t) = \frac{e^{-\rho t}}{\lambda(t)}$$

$$\lambda(t) = (c^*(t))^{-1}e^{-\rho t} \quad (32)$$

dan

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = -\lambda(t)(A - \delta - n(t)) \quad (33)$$

Eliminasi $\dot{\lambda}(t)$ antara persamaan 33 dan turunan persamaan 32 untuk mendapatkan $\dot{c}^*(t)$, sehingga diperoleh:

$$\dot{c}^*(t) = c^*(t)(A - \delta - \rho - n(t))$$

E. Simulasi

Pada simulasi numerik nilai awal variable yang digunakan sesuai dengan jurnal [23], nilai awal variabel dan parameter model Ramsey-Cass-Koopmans yang digunakan disajikan pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Berikut merupakan hasil simulasi pada model Ramsey-Cass-Koopmans dengan pertumbuhan tenaga kerja tidak konstan dengan kontrol konsumsi per kapita yang didapat

dengan nilai variabel dan parameter yang diberikan:

Berdasarkan Gambar 1 diketahui bahwa stok modal per kapita dengan nilai awal 1.363.640 terus mengalami peningkatan setelah dilakukan kontrol optimal dengan Metode Langsung hingga sebesar 13.565.100 pada tahun ke-5. Demikian juga setelah dilakukan kontrol optimal dengan Metode Tidak Langsung stok modal per kapita dengan nilai awal 1.363.640 terus mengalami peningkatan hingga sebesar 14.599.900 pada tahun ke-5. Hal ini terjadi karena kontrol konsumsi per kapita sudah efektif sehingga dapat menghasilkan stok modal per kapita yang terus bertambah untuk periode selanjutnya. Artinya, kontrol konsumsi per kapita dapat memaksimalkan utilitas konsumsi.

Berdasarkan Gambar 2 diketahui bahwa pemberian kontrol konsumsi per kapita menggunakan Metode Langsung dengan nilai awal 100.000 terus mengalami peningkatan hingga sebesar 1.607.190 pada tahun ke-5. Demikian menggunakan Metode Tidak Langsung pemberian kontrol konsumsi per kapita dengan nilai awal 100.000 terus mengalami peningkatan hingga sebesar 1.487.970 pada tahun ke-5. Hal ini dapat terjadi karena konsumsi per kapita efektif yang pada akhirnya dapat meningkatkan produktivitas. Sehingga stok modal per kapita terus meningkat akibatnya dari pendapatan yang diperoleh ada sebagian yang dialokasikan untuk konsumsinya terus meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa dengan adanya kontrol konsumsi per kapita dapat memaksimalkan utilitas konsumsi.

Berdasarkan Gambar 3 diketahui bahwa percepatan laju perubahan stok modal per kapita sebesar -645.455, kemudian terus mengalami peningkatan setelah dilakukan kontrol optimal hingga tahun ke-5 nilai percepatan laju perubahan stok modal per kapita sebesar 6.531.880. Nilai perubahan yang terjadi pada stok modal per kapita adalah pertambahan artinya stok modal per kapita semakin bertambah. Hal ini terjadi akibat pemberian kontrol konsumsi per kapita yang berpengaruh pada efisiensi dan produktivitas.

Dari hasil simulasi kontrol optimal dengan Metode Langsung dan Tidak Langsung menunjukkan pemberian kontrol konsumsi per kapita efektif dalam memaksimalkan utilitas konsumsi. Pada Metode Tidak Langsung, nilai ρ dan λ memengaruhi nilai konsumsi per kapita. Jika nilai ρ lebih besar dari λ , maka konsumsi per kapita akan menurun lebih cepat seiring waktu sehingga stok modal per kapita terus menurun seiring waktu. Dengan demikian kedua metode tersebut dapat digunakan dalam pengambilan keputusan konsumsi.

V. KESIMPULAN/RINGKASAN

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, terdapat beberapa hal yang dapat disimpulkan yang Pertama, Model Ramsey-Cass-Koopmans dengan pertumbuhan jumlah tenaga kerja tidak konstan positif dan unik. Kontrol optimal pada model Ramsey-Cass-Koopmans dengan pertumbuhan jumlah tenaga kerja tidak konstan eksis.

Kedua, setelah dilakukan kontrol optimal menggunakan Metode Langsung diperoleh kontrol konsumsi per kapita c yang optimal yaitu:

$$c^*(t) = Ax(t) - \delta x(t) - n(t)x(t) - \dot{x}(t)$$

sedangkan setelah dilakukan kontrol optimal menggunakan Metode Tidak Langsung diperoleh kontrol konsumsi per

kapita c yang optimal yaitu:

$$c^*(t) = \frac{e^{-\rho t}}{\lambda}$$

Ketiga, hasil simulasi yang dilakukan menunjukkan kontrol optimal berupa konsumsi per kapita efektif dalam memaksimalkan utilitas konsumsi. Selain itu, berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa Metode Langsung dan Tidak Langsung dapat digunakan dalam mengambil keputusan konsumsi.

Adapun saran dari penelitian ini untuk penelitian selanjutnya yaitu dapat mengembangkan model Ramsey-Cass-Koopmans dengan pertumbuhan jumlah tenaga kerja tidak konstan menggunakan metode yang berbeda dalam menyelesaikan kontrol optimalnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. Dinar and M. Hasan, *Pengantar Ekonomi: Teori dan Aplikasi*. Makasar: CV. Nur Lina Bekerjasama dengan Pustaka Taman Ilmu, 2018. ISBN: 978-602-51907-3-5.
- [2] S. Sudirman and M. Alhudhori, "Pengaruh konsumsi rumah tangga, investasi terhadap pertumbuhan ekonomi di provinsi Jambi," *ekonomis : Journal of Economics and Business*, vol. 2, no. 1, p. 81, Mar. 2018, doi: 10.33087/ekonomis.v2i1.33.
- [3] S. Nurmainah, "Analisis pengaruh belanja modal pemerintah daerah ,tenaga kerja terserap dan indeks pembangunan manusia terhadap pertumbuhan ekonomi dan kemiskinan (studi kasus 35 kabupaten / kota di provinsi Jawa Tengah)," *Jurnal Bisnis dan Ekonomi*, vol. 20, no. 2, pp. 131–141, Sep. 2013.
- [4] N. Chalid, "Pengeluaran konsumsi rumah tangga di daerah Riau," *Jurnal Ekonomi Universitas Riau*, vol. 18, no. 1, pp. 28–40, Mar. 2010.
- [5] S. Sukirno, *Mikroekonomi Teori Pengantar*, 3rd ed. Jakarta: PT. RajaGrafind Persada, 2008. ISBN: 979-421-412-4.
- [6] D. Idayani and S. Subchan, "Optimal control of multi-supplier inventory management with lead time," *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 1, p. 23, Feb. 2020, doi: 10.12962/j24775401.v6i1.5040.
- [7] V. Kajanovičová, B. Novotný, and M. Pospíšil, "Ramsey model with non-constant population growth," *Math Soc Sci*, vol. 104, pp. 40–46, Mar. 2020, doi: 10.1016/j.mathsocsci.2020.01.004.
- [8] R. Syahputra, "Analisis faktor-faktor yang mempengaruhi pertumbuhan ekonomi di Indonesia," *Jurnal Samudra Ekonomika*, vol. 1, no. 2, pp. 183–191, Oct. 2017.
- [9] O. Bundau and M. Neamtu, "The analysis of mathematical models associated to some economic growth processes with endogenous population," *WSEAS Trans Math*, vol. 9, no. 8, pp. 648–657, Jul. 2010.
- [10] F. P. Ramsey, "A mathematical theory of saving," *The Economic Journal*, vol. 38, no. 152, p. 543, Dec. 1928, doi: 10.2307/2224098.
- [11] D. Cass, "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation," *Rev Econ Stud*, vol. 32, no. 3, p. 233, Jul. 1965, doi: 10.2307/2295827.
- [12] W. Fleming and R. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York, NY: Springer New York, 1975. doi: 10.1007/978-1-4612-6380-7. ISBN: 978-1-4612-6382-1.
- [13] M. Giaquinta and G. Modica, *Mathematical Analysis*. Boston: Birkhäuser Boston, 2012. doi: 10.1007/978-0-8176-8310-8. ISBN: 978-0-8176-8309-2.
- [14] H. Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, vol. 110. Cham: Springer International Publishing, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-31484-6. ISBN: 978-3-319-31482-2.
- [15] F. L. Lewis, D. L. Vrabie, and V. L. Syrmos, *Optimal Control*, 3rd ed. New Jersey: Wiley, 2012. doi: 10.1002/9781118122631. ISBN: 9780470633496.
- [16] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*, 1st ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2007. doi: 10.1201/9781420011418. ISBN: 9781420011418.
- [17] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*. New York: McGraw-Hill Education, 2015. ISBN: 978-0-07-339792-4.
- [18] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996. doi: 10.1007/978-3-642-61453-8. 978-3-540-60934-6.
- [19] W. Boutayeb, M. E. N. Lamlili, A. Boutayeb, and M. Derouich, "The dynamics of a population of healthy people, pre-diabetics and diabetics with and without complications with optimal control," in *Proceedings of the Mediterranean Conference on Information & Communication Technologies 2015*, 2016, pp. 463–471. doi: 10.1007/978-3-319-30301-7_49.
- [20] A. A. Krasovskii, P. D. Lebedev, and A. M. Tarasyev, "Some Facts about the Ramsey Model," *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 299, no. S1, pp. 123–131, Dec. 2017, doi: 10.1134/S0081543817090152.
- [21] S. Subchan and R. Żbikowski, "Computational optimal control of the terminal bunt manoeuvre—part 1: minimum altitude case," *Optim Control Appl Methods*, vol. 28, no. 5, pp. 311–353, Sep. 2007, doi: 10.1002/oca.807.
- [22] S. Subchan and R. Żbikowski, "Computational optimal control of the terminal bunt manoeuvre—part 2: minimum-time case," *Optim Control Appl Methods*, vol. 28, no. 5, pp. 355–379, Sep. 2007, doi: 10.1002/oca.806.
- [23] S. D. Sulistiana, "Pengaruh jumlah tenaga kerja dan modal terhadap hasil produksi industri kecil sepatu dan sandal di desa sambiroto kecamatan sooko kabupaten Mojokerto," *Jurnal Pendidikan Ekonomi (JUPE)*, vol. 1, no. 3, 2013.