

Optimasi Pertumbuhan Mikroalga dengan Kendali Intensitas Cahaya, Karbondioksida, dan Nutrisi Limbah Cair Tahu

Dinda Ayuning Wulan, Mardlijah, dan Haryanto
Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: mardlijah@matematika.its.ac.id

Abstrak—Mikroalga memiliki banyak manfaat, salah satunya adalah sebagai sumber energi terbarukan karena kandungan minyaknya tinggi. Dengan memanfaatkan mikroalga, bahan bakar yang dihasilkan menjadi bahan bakar ramah lingkungan karena mikroalga mampu menyerap karbondioksida dan menghilangkan polutan pada suatu limbah. Pertumbuhan mikroalga dipengaruhi oleh berbagai faktor lingkungan, seperti intensitas cahaya, karbondioksida, dan nutrisi. Pada penelitian ini, dibahas mengenai kendali optimal pada pertumbuhan mikroalga dengan variabel kendalinya adalah intensitas cahaya, aliran karbondioksida, dan aliran nutrisi limbah cair tahu sehingga pertumbuhan mikroalga dapat maksimal dan menghasilkan biomassa yang melimpah, serta mampu mengurangi limbah cair tahu yang ada di lingkungan. Untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal digunakan metode Pontryagin Maximum Principle. Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa adanya pengendalian optimal dapat meningkatkan konsentrasi mikroalga hingga 10,2861%.

Kata Kunci—Intensitas Cahaya, Karbondioksida, Kendali Optimal, Mikroalga, Nutrisi, Pontryagin Maximum Principle.

I. PENDAHULUAN

MIKROALGA merupakan organisme mikroskopis berfotosintesis yang ditemukan di berbagai wilayah perairan. Mikroalga memiliki potensi yang besar dalam berbagai aplikasi, termasuk produksi biomassa, bahan bakar nabati, pakan ternak, serta pengolahan air dan limbah. Dalam beberapa dekade terakhir, penelitian tentang pertumbuhan mikroalga telah menjadi fokus utama dalam upaya untuk mengoptimalkan produksi biomassa dan mengatasi masalah lingkungan. Untuk mencapai pertumbuhan yang optimal, mikroalga membutuhkan kondisi lingkungan yang sesuai, termasuk intensitas cahaya, ketersediaan karbondioksida, dan nutrisi [1].

Intensitas cahaya merupakan faktor kritis dalam pertumbuhan dan produktivitas mikroalga karena perannya sebagai sumber energi utama dalam proses fotosintesis [2]. Dalam fotosintesis, energi cahaya digunakan untuk mengubah air dan karbondioksida menjadi glukosa dan oksigen, dan glukosa inilah yang digunakan untuk membangun biomassa mikroalga. Oleh karena itu, intensitas cahaya yang optimal harus didukung oleh ketersediaan karbondioksida yang cukup.

Salah satu pendekatan yang sedang dikembangkan dalam penelitian mikroalga adalah penggunaan limbah cair tahu sebagai media kultivasi. Limbah cair tahu mengandung nutrisi yang diperlukan oleh mikroalga, seperti nitrogen, fosfor, protein, lemak, karbohidrat, vitamin, asam organik, asam amino, isoflavon, saponin, kalsium, besi dan nutrisi lain [2] yang penting untuk pertumbuhan. Dengan memanfaatkan limbah cair tahu sebagai media pertumbuhan

mikroalga, kita dapat mengurangi dampak negatif dari pembuangan limbah tersebut dan sekaligus memanfaatkannya sebagai sumber yang bernilai.

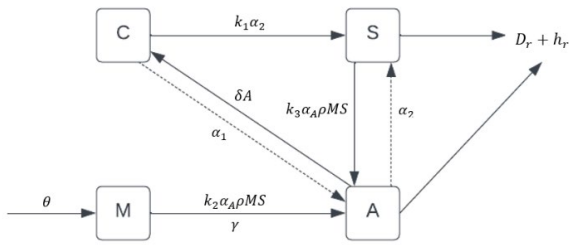
Pada saat yang sama, pemahaman yang mendalam tentang respons mikroalga terhadap variabel lingkungan juga menjadi kunci dalam mengoptimalkan pertumbuhan mikroalga. Kendali intensitas cahaya, karbondioksida, dan nutrisi merupakan faktor-faktor yang penting dalam kultivasi mikroalga.

Pengaturan yang tepat terhadap faktor-faktor ini dapat meningkatkan produksi biomassa mikroalga. Maka dari itu, untuk mengetahui pertumbuhan mikroalga yang dipengaruhi oleh faktor-faktor tersebut, diperlukan suatu model matematika yang dapat merepresentasikan permasalahan yang terjadi guna mengoptimalkan pertumbuhan tersebut. Beberapa penelitian mengenai model matematika pertumbuhan mikroalga telah dilakukan, salah satu contohnya adalah penelitian yang dilakukan oleh Thornton [3]. Model matematika Thornton menggambarkan dua tahapan proses sederhana pertumbuhan alga yang dipengaruhi oleh karbondioksida dan aliran nutrisi. Selain itu, terdapat penelitian yang dilakukan oleh R. Ratianingsih [4] dengan memodelkan produksi biomassa mikroalga dan produksi lipid dengan dilakukan kendali optimal pengaturan intensitas cahaya dan nutrisi limbah cair.

Dalam studi ini, digunakan model matematika yang merupakan hasil pengembangan dari model matematika penelitian oleh Thornton dan R. Ratianingsih, dimana kontrol yang diberikan berupa nutrisi, intensitas cahaya, dan karbondioksida. Dilakukan pula kendali optimal dengan menggunakan *Pontryagin Maximum Principle* sehingga diharapkan pertumbuhan mikroalga dapat dimaksimalkan.

II. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini digunakan data parameter dan konsentrasi awal dari mikroalga, nutrisi, glukosa, dan karbondioksida yang diperoleh dari penelitian Thornton [4] dan R. Ratianingsih [5], serta menambahkan beberapa data parameter dari asumsi. Kemudian dilakukan modifikasi model matematika dengan menggabungkan model dari penelitian Thornton dan R. Ratianingsih dengan menambahkan variabel kontrol berupa nutrisi, intensitas cahaya, dan karbondioksida. Setelah memodifikasi model matematika, dilakukan proses non-dimensionalisasi. Tahap berikutnya adalah menganalisis sifat model matematika, seperti kestabilan dan keterkontrolan sistem. Langkah selanjutnya adalah merumuskan masalah kendali optimal yang terdiri dari model matematika, fungsi objektif, dan syarat batas yang harus dipenuhi. Penyelesaian masalah



Gambar 1. Diagram kompartemen pertumbuhan mikroalga.

kendali optimal ini menggunakan *Pontryagin Maximum Principle*, dengan tahapan berupa pembentukan fungsi Hamiltonian, penentuan kondisi stasioner, penghitungan fungsi Hamiltonian yang optimal, dan akhirnya menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*. Selanjutnya membuat program simulasi menggunakan Matlab dengan memanfaatkan metode Runge-Kutta orde empat secara *forward-backward sweep*. Langkah terakhir yaitu melakukan analisis hasil simulasi guna memperoleh informasi tentang perubahan konsentrasi mikroalga sebelum dan setelah pemberian pengendalian.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Modifikasi Model Matematika

Model matematika pertumbuhan mikroalga dimodifikasi dengan menggunakan model dari penelitian Thornton [4] sebagai model acuan utama dan menambahkan beberapa parameter dari model penelitian R.Ratianingsih [5]. Selain itu, variabel kontrol optimal yang digunakan adalah nutrisi (u_1), intensitas cahaya (u_2), dan karbondioksida (u_3). Model matematika yang telah dimodifikasi dapat digambarkan pada diagram kompartemen seperti pada Gambar 1.

Dari diagram kompartemen di atas model matematika pertumbuhan mikroalga adalah sebagai berikut:

$$\dot{A} = \alpha_A \rho MS - (D_r + h_r)A$$

$$\dot{M} = \theta - k_2 \alpha_A \rho MS - \gamma M$$

$$\dot{S} = \alpha_2 C - k_3 \alpha_A \rho MS - (D_r + h_r)S$$

$$\dot{C} = \delta A - k_1 \alpha_2 C - \alpha_1 A$$

Deskripsi variabel dan parameter dijabarkan sebagai berikut:

- A : Konsentrasi mikroalga
- M : Konsentrasi nutrisi
- S : Konsentrasi glukosa
- C : Konsentrasi karbondioksida
- α_A : Konstanta pertumbuhan biomassa
- α_1 : Laju penyerapan CO₂ oleh mikroalga melalui proses respirasi sel
- α_2 : Konstanta fotosintesis
- ρ : Konsentrasi nutrisi maksimal yang dapat diserap mikroalga
- D_r : Tingkat kematian mikroalga
- h_r : Tingkat pemanenan mikroalga
- k_1 : Tingkat perubahan CO₂ menjadi (CH₂O)₆
- k_2 : Tingkat perubahan nutrisi menjadi mikroalga
- k_3 : Tingkat perubahan (CH₂O)₆ menjadi mikroalga

Tabel 1.
Nilai parameter

Parameter	Nilai
α_A	10,2
α_1	0,9
α_2	6,9
ρ	0,036364
D_r	0,46
h_r	0,4
k_1	0,05
k_2	0,1
k_3	0,9
θ	4,75
γ	0,5
δ	2

θ : Substrat nutrisi limbah cair tahu yang masuk ke dalam ekosistem perairan

γ : Laju penyerapan nutrisi limbah cair tahu oleh mikroalga

δ : Laju pengeluaran CO₂ melalui proses respirasi di malam hari

Kemudian dilakukan proses non-dimensionalisasi. Non-dimensionalisasi dapat dilakukan karena tidak mengubah kualitatif model. Masing-masing variabel keadaan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A = a^* \hat{a}$$

$$M = m^* \hat{m}$$

$$S = s^* \hat{s}$$

$$C = c^* \hat{c}$$

dimana a^*, m^*, s^*, c^* merupakan variabel keadaan baru sedangkan $\hat{a}, \hat{m}, \hat{s}, \hat{c}$ berturut-turut merupakan parameter A, M, S, C sehingga a^*, m^*, s^*, c^* non-dimensional.

Nilai A, M, S, C disubstitusi ke dalam model sistem persamaan diferensial, kemudian dilakukan penyederhanaan sehingga didapat sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{da^*}{dt^*} = \alpha_A \rho n_1 m^* s^* - (D_r + h_r) a^* \quad (1)$$

$$\frac{dm^*}{dt^*} = \theta_1 - k_2 \alpha_A \rho n_2 m^* s^* - \gamma m^* \quad (2)$$

$$\frac{ds^*}{dt^*} = \alpha_2 n_3 c^* - k_3 \alpha_A \rho n_4 m^* s^* - (D_r + h_r) s^* \quad (3)$$

$$\frac{dc^*}{dt^*} = n_5 (\delta - \alpha_1) a^* - k_1 \alpha_2 c^* \quad (4)$$

B. Titik Kesetimbangan

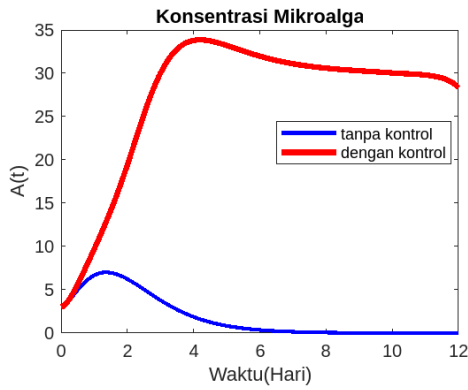
Titik kesetimbangan yang diperoleh dari sistem persamaan pertumbuhan mikroalga pada persamaan 1-4 adalah titik kesetimbangan saat $m^* = 1, s^* = 1$, maka

$$\tilde{a} = \frac{\alpha_A \rho n_1}{D_r + h_r}$$

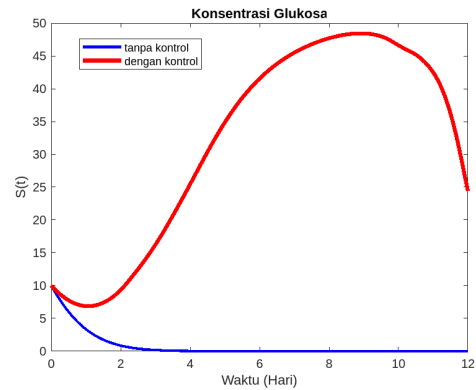
$$\tilde{c} = \frac{\alpha_A \rho n_1 n_5 (\delta - \alpha_1)}{k_1 \alpha_2 (D_r + h_r)}$$

sehingga diperoleh:

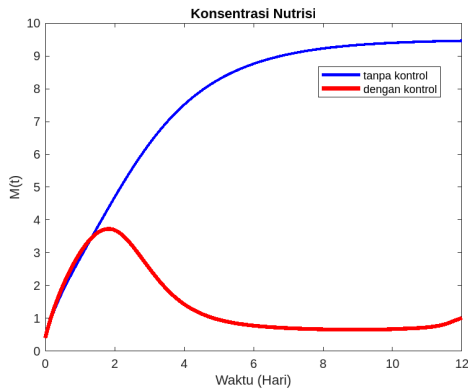
$$E(\tilde{a}, \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{c}) = \left(\frac{\alpha_A \rho n_1}{D_r + h_r}, 1, 1, \frac{\alpha_A \rho n_1 n_5 (\delta - \alpha_1)}{k_1 \alpha_2 (D_r + h_r)} \right)$$



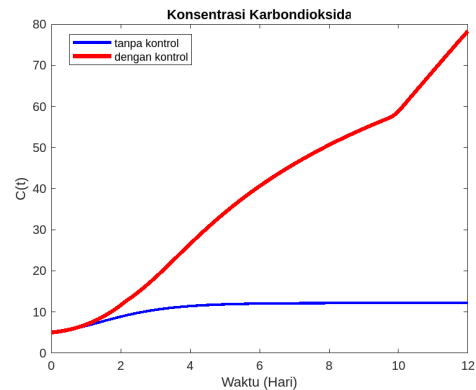
Gambar 4. Konsentrasi mikroalga sebelum dan sesudah pengendalian.



Gambar 2. Konsentrasi glukosa sebelum dan sesudah pengendalian.



Gambar 5. Konsentrasi nutrisi sebelum dan sesudah pengendalian.



Gambar 3. Konsentrasi karbondioksida sebelum dan sesudah pengendalian.

C. Analisis Kestabilan

Model pertumbuhan mikroalga pada persamaan 1-4 menunjukkan sistem persamaan non-linear. Maka, sebelum melakukan analisis kestabilan sistem, perlu dilakukan linearisasi sekitar titik kesetimbangan a, m, s, c dengan membentuk matriks Jacobian.

$$J = \begin{bmatrix} -(D_r + h_r) & \alpha_A \rho n_1 & \alpha_A \rho n_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \alpha_A \rho n_2 - \gamma & -k_2 \alpha_A \rho n_2 & 0 \\ 0 & -k_3 \alpha_A \rho n_4 & -k_3 \alpha_A \rho n_4 - (D_r + h_r) & \alpha_2 n_3 \\ n_5 (\delta - \alpha_1) & 0 & 0 & -k_1 \alpha_2 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik:

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4$$

dimana:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = k_3 \alpha_A \rho n_4 + 2(D_r + h_r) + k_2 \alpha_A \rho n_2 + \gamma$$

$$-k_2 k_3 \alpha_A^2 \rho^2 n_2 n_4 + k_1 \alpha_2$$

$$a_2 = (D_r + h_r)[k_3 \alpha_A \rho n_4 + (D_r + h_r) + k_2 \alpha_A \rho n_2$$

$$+ \gamma - k_2 k_3 \alpha_A^2 \rho^2 n_2 n_4 + k_1 \alpha_2] + k_1 \alpha_2 [k_3 \alpha_A \rho n_4$$

$$+ (D_r + h_r) + k_2 \alpha_A \rho n_2 + \gamma - k_2 k_3 \alpha_A^2 \rho^2 n_2 n_4]$$

$$+ k_2 k_3 \alpha_A^2 \rho^2 n_2 n_4$$

$$a_3 = (D_r + h_r)[k_1 \alpha_2 [k_3 \alpha_A \rho n_4 + (D_r + h_r) + k_2 \alpha_A \rho n_2$$

$$+ \gamma - k_2 k_3 \alpha_A^2 \rho^2 n_2 n_4] + k_2 k_3 \alpha_A^2 \rho^2 n_2 n_4 + k_2 \alpha_A \rho n_2$$

$$(D_r + h_r) + k_3 \alpha_A \rho n_4 \gamma + \gamma(D_r + h_r)] + k_1 \alpha_2$$

$$[k_2 \alpha_A \rho n_2 (D_r + h_r) + k_3 \alpha_A \rho n_4 \gamma + \gamma(D_r + h_r)]$$

$$- \alpha_A \alpha_2 \rho n_1 n_3$$

$$a_4 = k_1 \alpha_2 (D_r + h_r) [k_2 \alpha_A \rho n_2 (D_r + h_r) + k_3 \alpha_A \rho n_4 \gamma$$

$$+ \gamma(D_r + h_r)] + \alpha_A \alpha_2 \rho n_1 n_3$$

Dengan menerapkan kriteria Routh-Hurwitz dihasilkan table persamaan sebagai berikut:

λ^4	a_0	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	0
λ^2	b_1	b_2	0
λ^1	c_1	c_2	0
λ^0	d_1	0	0

dimana:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - 1 a_3}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_4 a_1}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} = \frac{c_1 b_2 - b_1(0)}{c_1} = \frac{c_1 b_2}{c_1}$$

Kestabilan sistem tercapai ketika nilai-nilai dalam kolom pertama tabel persamaan Routh-Hurwitz memiliki tanda yang

sama. Karena a_0 dan a_1 positif maka b_1, c_1, d_1 juga harus positif. Karena $a_1 > 0$, b_1 akan bernilai positif apabila terpenuhi $a_1 a_2 - a_3 > 0$, yang dapat disederhanakan menjadi $a_1 a_2 > a_3$.

Dengan diasumsikan $b_1 > 0$, maka c_1 akan memiliki nilai positif jika:

$$b_1 a_3 - a_4 a_1 > 0$$

$$b_1 a_3 > a_4 a_1$$

Kemudian dengan asumsi $c_1 > 0$, maka d_1 akan bernilai positif jika $c_1 b_2 > 0$.

$$c_1 b_2 > 0$$

$$\left(\frac{b_1 a_3 - a_4 a_1}{b_1}\right) b_2 > 0$$

$$\frac{b_1 a_3 - a_4 a_1}{b_1} > 0$$

Karena diasumsikan $b_1 > 0$, maka

$$b_1 a_3 - a_4 a_1 > 0$$

$$b_1 a_3 > a_4 a_1$$

Dari paparan di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa sistem di sekitar titik setimbang bersifat stabil apabila terpenuhi $a_1 a_2 > a_3$ dan $b_1 a_3 > a_4 a_1$.

D. Analisis Keterkontrolan

Untuk melakukan analisis keterkontrolan terlebih dahulu dilakukan konstruksi model dengan menambahkan variabel kontrol u_1, u_2 , dan u_3 yang berturut-turut adalah kendali nutrisi, intensitas cahaya, dan karbondioksida. Sehingga didapat model kontrol optimal untuk pertumbuhan mikroalga adalah sebagai berikut:

$$\frac{da^*}{dt^*} = \alpha_A \rho n_1 m^* s^* - (D_r + h_r) a^*$$

$$\frac{dm^*}{dt^*} = \theta_1 - k_2 \alpha_A \rho n_2 m^* s^* - (1 - u_1) \gamma m^*$$

$$\frac{ds^*}{dt^*} = u_2 \alpha_2 n_3 c^* - k_3 \alpha_A \rho n_4 m^* s^* - (D_r + h_r) s^*$$

$$\frac{dc^*}{dt^*} = n_5 (\delta - \alpha_1) a^* - u_3 k_1 \alpha_2 c^*$$

dengan $0 \leq u_1, u_2, u_3 \leq 1$ yang kemudian diperoleh matriks A dan B.

$$A = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \\ 0 & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{41} & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix}$$

dimana:

$$Q_{11} = -(D_r + h_r) \quad Q_{32} = -k_3 \alpha_A \rho n_4$$

$$Q_{12} = \alpha_A \rho n_1 \quad Q_{33} = -k_3 \alpha_A \rho n_4 - (D_r + h_r)$$

$$Q_{13} = \alpha_A \rho n_1 \quad Q_{34} = \alpha_2 n_3$$

$$Q_{22} = -k_2 \alpha_A \rho n_2 - \gamma \quad Q_{41} = n_5 (\delta - \alpha_1)$$

$$Q_{23} = -k_2 \alpha_A \rho n_2 \quad Q_{44} = -k_1 \alpha_2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

dimana:

$$b_1 = \gamma$$

$$b_3 = -\frac{\alpha_A \rho n_1 n_5 (\delta - \alpha_1)}{(D_r + h_r)}$$

$$b_2 = \frac{\alpha_A \rho n_1 n_3 n_5 (\delta - \alpha_1)}{k_1 (D_r + h_r)}$$

Kemudian matriks keterkontrolan M_c dihasilkan sebagai berikut:

$$M_c = (B|AB|A^2B|A^3B)$$

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ b_1 & 0 & 0 & w_3 & w_4 & 0 & x_4 & x_5 & x_6 & y_4 & y_5 & y_6 \\ 0 & b_2 & 0 & w_5 & w_6 & w_7 & x_7 & x_8 & x_9 & y_7 & y_8 & y_9 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & w_8 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & y_{10} & y_{11} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Kemudian nilai-nilai parameter dimasukkan ke dalam matriks keterkontrolan yang telah dibentuk, dan diketahui bahwa rank $M_c = 4$, sehingga sistem dinamik dari pertumbuhan mikroalga bersifat terkontrol.

E. Kendali Optimal PErumbuhan Mikroalga

Tujuan dari kendali optimal pertumbuhan mikroalga adalah memaksimalkan konsentrasi mikroalga dan meminimumkan biaya pengendalian pertumbuhan mikroalga. Secara matematis, tujuan dari kendali optimal yang ditetapkan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(a^* - \frac{D}{2} u_1^2 - \frac{N}{2} u_2^2 - \frac{P}{2} u_3^2 \right) dt$$

Berikutnya akan diperoleh kendali optimal menggunakan *Pontryagin Maximum Principle* dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1) Menetapkan Fungsi Hamiltonian

$$\mathcal{H} = a^* - \frac{D}{2} u_1^2 - \frac{N}{2} u_2^2 - \frac{P}{2} u_3^2$$

$$+ \lambda_1 (\alpha_A \rho n_1 m^* s^* - (D_r + h_r) a^*)$$

$$+ \lambda_2 (\theta_1 - k_2 \alpha_A \rho n_2 m^* s^* - (1 - u_1) \gamma m^*)$$

$$+ \lambda_3 (u_2 \alpha_2 n_3 c^* - k_3 \alpha_A \rho n_4 m^* s^* - (D_r + h_r) s^*)$$

$$+ \lambda_4 (n_5 (\delta - \alpha_1) a^* - u_3 k_1 \alpha_2 c^*)$$

2) Menentukan Kondisi Stasioner

a. Kontrol u_1

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0$$

$$-D u_1 + \lambda_2 \gamma m^* = 0$$

$$D u_1 = \lambda_2 \gamma m^*$$

$$u_1^* = \frac{\lambda_2 \gamma m^*}{D}$$

b. Kontrol u_2

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0$$

$$Nu_2 + \lambda_3 \alpha_2 n_3 c^* = 0$$

$$Nu_2 = \lambda_3 \alpha_2 n_3 c^*$$

$$u_2^* = \frac{\lambda_3 \alpha_2 n_3 c^*}{N}$$

c. Kontrol u_3

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = 0$$

$$-Pu_3 - \lambda_4 k_1 \alpha_2 c^* = 0$$

$$Pu_3 = -\lambda_4 k_1 \alpha_2 c^*$$

$$u_3^* = -\frac{\lambda_4 k_1 \alpha_2 c^*}{P}$$

3) Mendapatkan Fungsi Hamiltonian yang Optimal

$$\mathcal{H}^* = a^* - \frac{D}{2} u_1^2 - \frac{N}{2} u_2^2 - \frac{P}{2} u_3^2$$

$$+ \lambda_1 (\alpha_A \rho n_1 m^* s^* - (D_r + h_r) a^*)$$

$$+ \lambda_2 (\theta_1 - k_2 \alpha_A \rho n_2 m^* s^* - (1 - u_1^*) \gamma m^*)$$

$$+ \lambda_3 (u_2^* \alpha_2 n_3 c^* - k_3 \alpha_A \rho n_4 m^* s^* - (D_r + h_r) s^*)$$

$$+ \lambda_4 (n_5 (\delta - \alpha_1) a^* - u_3^* k_1 \alpha_2 c^*)$$

4) Menyelesaikan Persamaan State dan Costate

a. Persamaan State

$$\dot{a}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_1} = \alpha_A \rho n_1 m^* s^* - (D_r + h_r) a^*$$

$$\dot{m}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_2} = \theta_1 - k_2 \alpha_A \rho n_2 m^* s^* - (1 - u_1^*) \gamma m^*$$

$$\begin{aligned} \dot{s}^*(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_3} \\ &= u_2^* \alpha_2 n_3 c^* - k_3 \alpha_A \rho n_4 m^* s^* - (D_r + h_r) s^* \end{aligned}$$

$$\dot{c}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda_4} = n_5 (\delta - \alpha_1) a^* - u_3^* k_1 \alpha_2 c^*$$

b. Persamaan Costate

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial a^*} = -(1 - \lambda_1 (D_r + h_r) + \lambda_4 n_5 (\delta - \alpha_1))$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial m^*} \\ &= -(\lambda_1 \alpha_A \rho n_1 s^* - \lambda_2 (k_2 \alpha_A \rho n_2 s^* - u_1^* \gamma) \\ &\quad - \lambda_3 k_3 \alpha_A \rho n_4 s^*) \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial s^*}$$

$$= -(\lambda_1 \alpha_A \rho n_1 m^* - \lambda_2 k_2 \alpha_A \rho n_2 m^*$$

$$- \lambda_3 (k_3 \alpha_A \rho n_4 m^* - (D_r + h_r)))$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial c^*} = -(\lambda_3 u_2^* \alpha_2 n_3 - \lambda_4 u_3^* k_1 \alpha_2)$$

F. Hasil Simulasi

Untuk melakukan simulasi, nilai parameter dan kondisi awal dimasukkan ke dalam sistem, yang kemudian dianalisis menggunakan metode numerik Runge-Kutta Orde-4. Perubahan masing-masing konsentrasi sebelum dan sesudah pemberian kendali optimal ke dalam sistem persamaan pertumbuhan mikroalga diilustrasikan dalam bentuk grafik. Adapun nilai kondisi awal dari masing-masing konsentrasi adalah $A(0) = 3, M(0) = 0,4, S(0) = 10$ dan $C(0) = 5$, dimana nilai-nilai tersebut diperoleh dari referensi Thornton [4]. Untuk nilai bobot kendali nutrisi, intensitas cahaya, dan karbondioksida berturut-turut adalah $D = 0,238, N = 0,95, P = 0,25$.

Dengan nilai-nilai parameternya diberikan pada Tabel 1.

Hasil simulasi dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta Orde 4 ditampilkan dalam bentuk grafik sebagai mana pada Gambar 2, Gambar 3, Gambar 4, dan Gambar 5.

Grafik dari simulasi model matematika pertumbuhan mikroalga pada gambar di atas dapat membantu membandingkan konsentrasi mikroalga, nutrisi, glukosa, dan karbondioksida ketika sebelum dan sesudah diberi kontrol berupa nutrisi, intensitas cahaya, dan karbondioksida.

Gambar 2 menunjukkan bahwa sebelum diberi kontrol, konsentrasi mikroalga mengalami penurunan. Hal ini disebabkan karena pada Gambar 4, sebelum diberi kontrol konsentrasi glukosa juga mengalami penurunan. Dimana glukosa berpengaruh terhadap pembentukan mikroalga baru. Kemudian pada Gambar 2 setelah diberi kontrol, mikroalga mengalami kenaikan jumlah konsentrasi hingga mencapai 33,8583 satuan berat yang disebabkan oleh peningkatan konsentrasi glukosa. Hasil ini memberikan informasi bahwa dengan pemberian kendali, konsentrasi mikroalga mengalami peningkatan yaitu sebesar 10,2861%. Pada Gambar 4 setelah diberi kontrol berupa intensitas cahaya, glukosa mengalami kenaikan jumlah konsentrasi. Dimana bersama dengan karbondioksida, intensitas cahaya berperan dalam proses fotosintesis sehingga menghasilkan glukosa.

Gambar 3 menunjukkan peningkatan konsentrasi nutrisi sebelum diberi kontrol yang disebabkan karena jumlah mikroalga yang menurun sehingga sedikit nutrisi yang terserap. Lalu setelah diberi kontrol, nutrisi mengalami sedikit peningkatan jumlah konsentrasi dikarenakan pemberian kontrol nutrisi serta jumlah mikroalga yang meningkat sehingga banyak nutrisi yang terserap. Gambar 5 menunjukkan setelah diberi kontrol, konsentrasi karbondioksida meningkat. Dikarenakan dalam proses fotosintesis diperlukan karbondioksida yang cukup sehingga pembentukan glukosa dapat terjadi.

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Setelah dilakukan kendali optimal dengan menggunakan metode Pontryagin Maximum Principle diperoleh pengendali yang optimal, akan tetapi belum mendapat bobot pengendali

nutrisi, intensitas cahaya, dan karbondioksida yang optimal. Sebelum diberi pengendalian, konsentrasi mikroalga mengalami penurunan dikarenakan konsentrasi glukosa yang menurun sehingga pembentukan mikroalga baru menjadi berkurang. Setelah diberi pengendalian, konsentrasi mikroalga mengalami kenaikan hingga mencapai 33,8583 satuan berat yang disebabkan konsentrasi glukosa juga mengalami kenaikan. Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa adanya pengendalian optimal dapat meningkatkan konsentrasi mikroalga hingga 10,2861%.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. Kawaroe, T. Prartono, A. Sanuddin, D. Wulansari, and D. Augustine, *Mikroalga Potensi dan Pemanfaatannya untuk Produksi Bio Bahan Bakar*. Bogor: IPB Press, 2010. ISBN: 978-979-493-295-7.
- [2] M. A. Salim, *Mikroalga dalam Riset Biologi*. Bandung: Yayasan Lembaga Pendidikan dan Pelatihan Multiliterasi, 2022. ISBN: 978-623-98471-1-1.
- [3] W. Widayat and H. Hadiyanto, "Pemanfaatan limbah cair industri tahu untuk produksi biomassa mikroalga *nannochloropsis* sp sebagai bahan baku biodiesel," *Reaktor*, vol. 15, no. 4, pp. 253–260, Feb. 2016, doi: 10.14710/reaktor.15.4.253-260.
- [4] A. Thornton *et al.*, "Modeling and Optimization of Algae Growth," in *Proceedings of the 72nd European Study Group Mathematics with Industry*, J. Frank, R. Van der Mei, A. Den Boer, J. Bosman, N. Bouman, S. van Dam, and C. Verhoef, Eds., Jan. 2010, pp. 54–85.
- [5] Azim, R. Rationingsih, and N. Nacong, "Model matematika kendali optimal intensitas cahaya dan nutrisi pada pertumbuhan mikroalga dengan menggunakan metode pontryagin," *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, vol. 17, no. 1, pp. 70–81, Jun. 2020, doi: 10.22487/2540766X.2020.v17.i1.15173.