# Bilangan Kromatik Dominasi pada Graf-Graf Hasil Operasi Korona

Muh. Alwan Hadi, Dr. Darmaji, S.Si., M.T., Drs. Suhud Wahyudi, M.Si.
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
*e-mail*: darmaji@matematika.its.ac.id

***Abstrak*—Diberikan graf $G\,(V\,,\,E)$, pewarnaan kromatik dominasi ialah pewarnaaan simpul (*proper coloring*) graf $G$ dengan tambahan sifat setiap simpul mendominasi semua kelas warna. Warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan kromatik dominasi graf $G$ disebut bilangan kromatik dominasi graf $G$ dinotasikan dengan $\chi_d(G)$. Makalah ini membahas bagaimana mendapatkan kromatik dominasi dari graf $G$ dengan $G$ adalah graf hasil operasi korona dari dua graf yakni Lintasan dan Lingkaran. Selain itu, dibahas juga graf hasil operasi korona antara Graf lengkap dengan Lintasan dan Lingkaran. Berdasarkan pengamatan didapatkan bahwa Bilangan kromatik dominasi $\chi_d(G_m \odot P_n) = |V\,(Gm)| + 2$, untuk $m \geq 1$, $n \geq 2$ dengan $G_m$ graf terhubung order $m$ dan $P_n$ Lintasan order $n$, dan $\chi_d(G_m \odot C_n) = |V\,(Gm)| + 2$, dan $|V\,(Gm)| + 3$, berturut-turut untuk $n$ genap, dan $n$ gasal dengan $C_n$ Lingkaran order $n$.**

***Kata Kunci*—Bilangan Kromatik Dominasi, Graf Lengkap, Kromatik Dominasi, Lingkaran, Lintasan, Operasi Korona.**

## I. PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika. Secara matematis, suatu graf $G$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V,\ E)$ dengan $V$ adalah himpunan simpul (*vertex*) yang tidak kosong dan $E$ adalah himpunan boleh kosong yang menghubungkan simpul dan disebut sisi (*edge*). Selanjutnya himpunan simpul dari graf $G$ ditulis $V\,(G)$ dan himpunan sisi dari graf $G$ ditulis $E(G)$ [1].

Salah satu topik yang menjadi kajian teori graf adalah himpunan dominasi (*dominating set*) dan bilangan dominasi (*dominating number*). Himpunan dominasi ($S$) pada graf $G$ adalah subset dari $V\,(G)$ sedemikian hingga setiap simpul $G$ yang bukan elemen $S$ terhubung dan berjarak satu terhadap $S$. Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf $G$ disebut bilangan dominasi dari graf $G$ dan dinotasikan dengan $\gamma(G)$ [2]. Oleh karena itu, bilangan dominasi sangat erat kaitannya dengan himpunan dominasi.

Sejarah dominasi (*dominating*) pada graf dimulai pada awal tahun 1850 sejak pemain catur eropa antusias untuk menyelesaikan masalah *dominating queens*. Dalam masalah ini, dominasi digunakan untuk menentukan banyaknya *queen* sedemikian setiap *queen* bisa mendominasi atau menyerang setiap posisi dengan sekali perpindahan pada papan catur berukuran $8 \times 8$. Dalam teori graf, *queens* direpresentasikan sebagai simpul dan jalur perpindahan antara kotak pada papan catur dianggap sebagai sisi [2]. Go dan Canoy telah menunjukkan bilangan dominasi pada graf hasil operasi korona.

**Teorema I.1.** *Diberikan dua graf terhubung $G_m$ dan $H_n$ dengan masing-masing ordernya $m$ dan $n$ dengan $m, n \geq 1$, maka bilangan dominasi dari graf hasil operasi korona $G \odot H$ adalah $\gamma(G_m \odot H_n) = m$* [3].

Pewarnaan graf dibagi menjadi dua macam yaitu pewarnaan sisi dan pewarnaan simpul. Makalah ini dikhususkan pada pembahasan pewarnaan simpul. Pewarnaan simpul diartikan sebagai memberi warna pada setiap simpul graf sehingga dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Suatu graf $G$ dikatakan memiliki $k$-pewarnaan apabila graf $G$ dapat diwarnai dengan $k$ warna. Pemberian warna pada graf haruslah seminimal mungkin, warna minimal yang digunakan untuk mewarnai graf $G$ disebut bilangan kromatik $\chi(G)$.

Pewarnaan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai masalah kehidupan sehari-hari. Beberapa diantaranya yakni penjadwalan mata kuliah, pengaturan lampu lalulintas, penjadwalan acara televisi dan lain-lain [4].

Kromatik dominasi merupakan perpaduan antara dua konsep teori graf yakni konsep pewarnaan simpul dan konsep himpunan dominasi. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Relucca Gera [5]. Kromatik dominasi diartikan sebagai pewarnaan simpul dengan setiap simpul mendominasi setiap simpul dari beberapa kelas warna. Kardinalitas minimum dari kelas warna pada kromatik dominasi graf $G$ disebut bilangan kromatik dominasi dari graf $G$ dan dinotasikan $\chi_d(G)$.

**Definisi I.2.** *Sebuah simpul $v \in V$ merupakan dominator dari himpunan $S \subseteq V$ jika $v$ mendominasi setiap simpul $S$. Partisi $\phi = \{V_1, V_2, \dots V_k\}$ disebut dominator partisi jika setiap simpul $v \in V$ merupakan dominator pada paling sedikitnya satu dari $V_i$. Bilangan Dominasi partisi $\phi_d$ sama dengan $k$ minimum sehingga $G$ memiliki dominasi partisi dengan order $k$. Jika selanjutnya $\phi$ dijadikan pewarnaan simpul maka pewarnaan tersebut disebut pewarnaan dominasi (dominator coloring) $G$. Bilangan kromatik Dominasi $\chi_d(G)$ adalah banyak warna minimum yang digunakan pada pewarnaan dominasi* [6].

Operasi antara dua buah graf merupakan salah satu cara untuk mendapatkan bentuk graf-graf baru. Terdapat berba- gai jenis operasi didalam graf diantaranya yakni join $(+)$, gabungan $(\cup)$, kartesian $(\times)$, korona $(\odot)$ dan operasi comb $(\triangleright)$. Sebagai contoh graf grid merupakan hasil dari operasi kartesian dua buah Lintasan. Roda $W_n$ merupakan hasil dari operasi korona graf lengkap $K_1$ dengan $C_n$.

Penelitian mengenai kromatik dominasi dan bilangan kromatik dominasi telah banyak dilakukan antara lain, telah diteliti bilangan kromatik dominasi untuk graf hypercube $Q_n = Q_{n-1} \times k_2$ (dengan $Q_1 \cong P_2, n > 2$) dan beberapa graf *bipartite* [7]. Graf bintang $K_{1,n}$ dan graf lengkap $K_n$ memiliki $\chi_d(K_{1,n}) = 2, \chi_d(K_n) = n$ dan $\chi_d(P_n) = 1 + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ untuk $n = 2,3,4,5,7$ dan $\chi_d(P_n) = 2 + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ untuk $n$ yang lain. Lingkaran $C_n$ memiliki $\chi_d(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ untuk $n = 4$, $\chi_d(C_n) = 1 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ untuk $n = 5$ dan $\chi_d(C_n) = 2 + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ untuk $n$ yang lain. Graf roda $W_{1,n}$ memiliki $\chi_d(W_{1,n}) = 3$ untuk $n$ genap dan $\chi_d(W_{1,n}) = 4$ untuk $n$ gasal. Graf lengkap k-partite $K_{a_1,a_2,\dots,a_k}$ memiliki $\chi_d(K_{a1}, \dots K_{ak}) = \mathrm{k}$ [8]. Salah satu topik mengenai bilangan kromatik dominasi graf yang belum diteliti adalah jika dua graf sederhana dikenakan operasi korona kemudian hasil operasi tersebut dicari bilangan kromatik dominasinya. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik dominasi $\chi_d(G)$ graf hasil operasi korona dari graf sederhana.

## II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas bilangan kromatik dominasi pada graf hasil operasi korona dari Lintasan dan Lingkaran yakni $P_m \odot P_n$, $P_m \odot C_n$, $C_m \odot P_m$, dan $C_m \odot C_n$. Selanjutnya $K_m \odot P_n$, $K_m \odot C_n$, sehingga didapatkan bentuk umum dari bilangan kromatik dominasi pada graf hasil operasi korona dari ebarang graf ($G_m$) dengan graf Lintasan dan Lingkaran.

### *A. Kromatik Dominasi Lintasan dengan Lintasan*

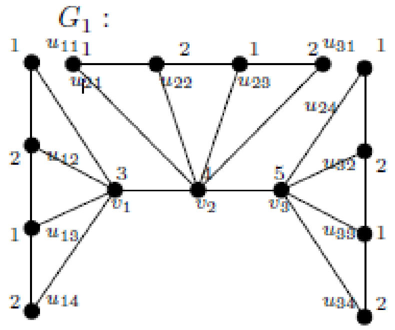
**Observasi II.*1*** (***Kromatik Dominasi*** $P_m \odot P_n$) *Diberikan Lintasan* $P_m$ *dan* $P_n$ *masing-masing memiliki order* $m, n \geq 2$, $m, n \in N$. *Jika* $G = P_m \odot P_n$ *adalah graf hasil operasi korona dari* $P_m$ *dan* $P_n$ *maka bilangan kromatik dominasi dari* $\chi_d(G) = |V(P_m)| + 2$.

*Bukti*. Misalkan Graf $G$ adalah graf hasil korona dari graf $P_m$ dan $P_n$, yaitu $G = P_m \odot P_n$. Order dari Lintasan $|P_m| = m$ dan Lintasan $|P_n| = n$. Katakan $v_1, v_2, \dots, v_m$ adalah simpul-simpul graf $P_m$ dan $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}$ adalah simpul-simpul $P_n$ yang melekat dengan simpul ke-$v_i$ untuk $1 \leq i \leq m$. Konstruksi pewarnaan kromatik dominasi $f : V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots \chi_d(G)\}$ dengan menggunakan $|V(P_m)| + 2$ warna sebagai berikut : untuk $u_{i(2j+1)}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{i(2j)}$ katakan $f(u_{i(2j)}) = 2$ kemudian untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 2 + i$, untuk setiap $1 \leq i \leq m, 0 \leq j$. Pewarnaan ini merupakan pewarnaan kromatik dominasi dari $G$, karena pewarnaan ini tetap merupakan pewarnaan simpul (*proper coloring*) dan himpunan dominasi minimum dari graf $G$ mendominasi setiap simpul dari kelas warna dengan kata lain simpul dengan kelas warna 1 dan 2 bertetangga dengan simpul dengan warna yang unik. Dengan demikian, didapatkan bahwa $\chi_d(G) = |V(P_m)| + 2$. ∎

Dengan demikian, Bilangan kromatik dominasi dari graf hasil operasi korona Lintasan ($P_m$) dengan Lintasan ($P_n$) hanya dipengaruhi oleh Lintasan ($P_m$) sebab Lintasan ($P_n$) minimal harus diwarnai dengan 2 warna sedangkan Lintasan ($P_m$) minimal harus diwarnai sebanyak $m$ warna agar memenuhi sifat kromatik dominasi minimum. Lebih jelasnya, Perhatikan Contoh II.1.1 dan Contoh II.1.2 berikut ini

**Contoh II.1.1**

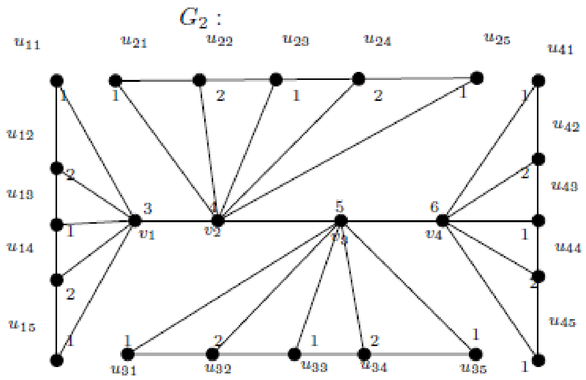
Diberikan Lintasan $P_3$ dan $P_4$, Jika Graf $G_1 = P_3 \odot P_4$ adalah graf hasil operasi korona Lintasan $P_3$ dan $P_4$, maka dengan menggunakan Observasi II.1 maka didapatkan bahwa $\chi_d(G_1) = 5$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 1.



**Gambar 1.** Kromatik dominasi graf $G_1$

**Contoh II.1.2**

Diberikan Lintasan $P_4$ dan $P_5$, Graf $G_2 = P_4 \odot P_5$ adalah graf hasil korona Lintasan $P_6$ dan $P_5$, maka dengan menggunakan Observasi II.1 maka didapatkan bahwa $\chi_d(G_2) = 6$, sebagaimana yang ditunjukkan



pada Gambar 2.

**Gambar 2.** Kromatik dominasi graf $G_2$

### *B. Kromatik Dominasi Lintasan dengan Lingkaran.*

**Observasi II.1** (***Kromatik Dominasi*** $P_m \odot C_n$) *Diberikan Lintasan* $P_m$ *dan Lingkaran* $C_n$ *masing-masing memiliki order* $m \geq 2, n \geq 4$ $m, n \in N$. *Jika* $H$ *adalah graf hasil operasi korona dari* $P_m$ *dan* $C_n$ *maka bilangan kromatik dominasi* $\chi_d(H) = \begin{cases} |V(P_m)| + 2, n \text{ genap} \\ |V(P_m)| + 3, n \text{ gasal} \end{cases}$

*Bukti*. Misalkan Graf $H$ adalah graf hasil korona dari graf $P_m$ dan $C_n$, yaitu $H = P_m \odot C_n$. Order dari Lintasan $|P_m| = m$ dan Lingkaran $|C_n| = n$. Katakan $v_1, v_2, \dots, v_m$ adalah simpul-simpul graf $P_m$ dan $u_{\{i1\}}, u_{\{i2\}}, \dots, u_{\{in\}}$ adalah simpul-simpul $C_n$ yang melekat dengan simpul ke-$v_i$ untu $1 \leq i \leq m$. Konstruksi pewarnaan kromatik dominasi $f : V(H) \rightarrow \{1,2,3, \dots \chi_d(H)\}$ terdapat dua kasus : kasus I ketika

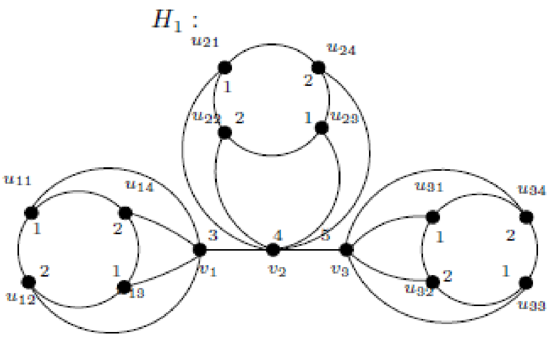
$C_n$. memiliki order genap. Kasus II ketika $C_n$ memiliki order gasal. Kasus I untuk $u_{\{i(2j+1)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{\{i(2j)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j)\}}) = 2$, dan untuk untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 2 + i$. Untuk setiap $1 \le i \le m, 0 \le j$ \$ Maka kita telah selesai dengan $|V(P_m)| + 2$ warna. Kasus II untuk $u_{\{i(2j+1)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{\{i(2j)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j)\}}) = 2$,untuk $u_{\{in\}}$ katakan $f(u_{\{in\}}) = 3$ dan untuk untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 3 + i$. Kasus II ini menghasilkan pewarnaan kromatik dominasi karena setiap simpul $v_i$ mendominasi dirinya sendiri dan mendominasi kelas warna 1, 2, dan 3. Sebaliknya setiap kelas warna 1, 2, 3 mendominasi warna yang unik. Maka kita telah selesai dengan $|V(P_m)| + 3$ warna.

■

Bilangan kromatik dominasi dari graf hasil operasi korona Lintasan ($P_m$) dengan Lingkaran ($C_n$) ditentukan oleh order Lintasan ($P_m$) sebab Lingkaran ($C_n$) minimal harus diwarnai dengan 2 atau 3 warna sedangkan Lintasan ($P_m$) minimal harus diwarnai sebanyak $m$ warna agar memenuhi sifat kromatik dominasi minimum. Lebih jelasnya, Perhatikan Contoh II.2.1 dan Contoh II.2.2 berikut ini.

**Contoh II.2.1**

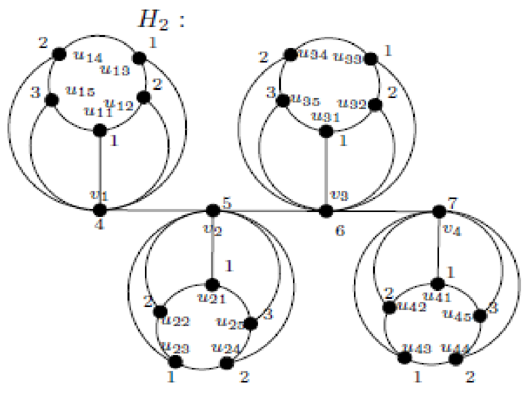
Diberikan Lintasan $P_3$ dan Lingkaran $C_4$, Jika Graf $H_1 = P_3 \odot C_4$ adalah graf hasil operasi korona Lintasan dan Lingkaran, maka dengan menggunakan Observasi II.2 maka didapatkan bahwa $\chi_d(H_1) = 5$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 3.




**Gambar 3.** Kromatik Dominasi $H_1$

**Contoh II.2.2**

Diberikan Lintasan $P_4$ dan Lingkaran $C_5$, Jika Graf $H_2 = P_4 \odot C_5$ adalah graf hasil operasi korona Lintasan $P_4$ dan Lingkaran $C_5$, maka dengan menggunakan Observasi II.2 maka didapatkan bahwa $\chi_d(H_2) = 7$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 4




**Gambar 4.** Kromatik Dominasi $H_2$

*C. Kromatik Dominasi Lingkaran dengan Lintasan.*

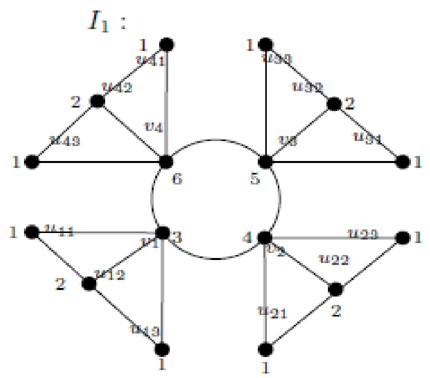
**Observasi II.3** (***Kromatik Dominasi*** $C_m \odot P_n$ ) *Diberikan Lingkaran $C_m$ dan Lintasan $P_n$ masing-masing memiliki order $m \ge 4, n \ge 2$ , $m, n \in N$. Jika I adalah graf hasil operasi korona dari $C_m$ dan $P_n$, maka bilangan kromatik dominasi dari* $\chi_d(I) = |V(C_m)| + 2$.

*Bukti.* Misalkan Graf I adalah graf hasil korona dari graf $C_m$ dan $P_n$, yaitu $I = C_m \odot P_n$. Order dari Lingkaran $|C_m| = m$ dan Lintasan $|P_n| = n$. Katakan $v_1, v_2, \dots, v_m$ adalah simpul-simpul graf $P_m$ dan $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}$ adalah simpul-simpul $P_n$ yang melekat dengan simpul ke-$v_i$ untuk $1 \le i \le m$. Konstruksi pewarnaan kromatik dominasi $f : V(I) \to \{1, 2, 3, \dots \chi_d(I)\}$ dengan menggunakan $|V(C_m)| + 2$ warna sebagai berikut : untuk $u_{i(2j+1)}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{i(2j)}$ katakan $f(u_{i(2j)}) = 2$ kemudian untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 2 + i$, untuk setiap $1 \le i \le m, 0 \le j$. Pewarnaan ini merupakan pewarnaan kromatik dominasi dari $I$, karena pewarnaan ini tetap merupakan pewarnaan simpul (*proper coloring*) dan himpunan dominasi minimum dari graf $I$ mendominasi setiap simpul dari kelas warna dengan kata lain simpul dengan kelas warna 1 dan 2 bertetangga dengan simpul dengan warna yang unik. Dengan demikian, didapatkan bahwa $\chi_d(I) = |V(C_m)| + 2$.

Bilangan kromatik dominasi dari graf hasil operasi korona Lingkaran ($C_m$) dengan Lintasan ($P_n$) ditentukan oleh order Lingkaran ($C_m$) sebab Lintasan ($P_n$) minimal harus diwarnai dengan 2 warna sedangkan Lingkaran ($C_m$) minimal harus diwarnai sebanyak m warna agar memenuhi sifat kromatik dominasi minimum. Lebih jelasnya, Perhatikan Contoh II.3.1. dan Contoh II.3.2. berikut ini.

**Contoh II.3.1**

Diberikan Lingkaran $C_4$ dan Lintasan $P_3$, Jika Graf $I_1 = C_4 \odot P_3$ adalah graf hasil operasi korona Lingkaran $C_4$ dan $P_3$, maka dengan menggunakan Observasi II.3 maka didapatkan bahwa $\chi_d(I_1) = 6$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 5.




**Gambar 5.** Kromatik Dominasi $I_1$

**Contoh II.3.2**

Diberikan Lingkaran $C_5$ dan Lintasan $P_4$, Jika Graf $I_2 = C_5 \odot P_4$ adalah graf hasil operasi korona Lingkaran $C_5$ dan $P_4$, maka dengan menggunakan Observasi II.3 maka didapatkan bahwa $\chi_d(I_2) = 7$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 6.

*D. Kromatik Dominasi Lingkaran dengan Lingkaran.*

**Observasi II.4** (***Kromatik Dominasi*** $C_m \odot C_n$ ) *Diberikan Lingkaran $C_m$ dan $C_n$ masing-masing memiliki order $m, n \geq 4$, $m, n \in N$. Jika $J$ adalah graf hasil operasi korona dari $C_m$ dan $C_n$, maka bilangan kromatik dominasi dari* $\chi_d(J) = \begin{cases} |V(C_m)| + 2 \text{ , } n \text{ genap} \\ |V(C_m)| + 3 \text{ , } n \text{ gasal} \end{cases}$

*Bukti.* Misalkan Graf $J$ adalah graf hasil korona dari graf $C_m$ dan $C_n$, yaitu J= $C_m \odot C_n$. Order dari Lingkaran $|C_m| = m$ dan Lingkaran $|C_n| = n$. Katakan $v_1, v_2, \ldots, v_m$ adalah simpul-simpul graf $C_m$ dan $u_{\{i1\}}, u_{\{i2\}}, \ldots, u_{\{in\}}$ adalah simpul-simpul $C_n$ yang melekat dengan simpul ke-$v_i$ untu $1 \leq i \leq m$. Konstruksi pewarnaan kromatik dominasi $f : V(J) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots \chi_d(J)\}$ terdapat dua kasus : kasus I ketika $C_n$. memiliki order genap. Kasus II ketika $C_n$ memiliki order gasal. Kasus I untuk $u_{\{i(2j+1)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{\{i(2j)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j)\}}) = 2$, dan untuk untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 2 + i$. Untuk setiap $1 \leq i \leq m, 0 \leq j$ \$ Maka kita telah selesai dengan $|V(C_m)| + 2$ warna. Kasus II untuk $u_{\{i(2j+1)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{\{i(2j)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j)\}}) = 2$,untuk $u_{\{in\}}$ katakan $f(u_{\{in\}}) = 3$ dan untuk untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 3 + i$. Kasus II ini menghasilkan pewarnaan kromatik dominasi karena setiap simpul $v_i$ mendominasi dirinya sendiri dan mendominasi kelas warna 1, 2, dan 3. Sebaliknya setiap kelas warna 1, 2, 3 mendominasi warna yang unik. Maka kita telah selesai dengan $|V(C_m)| + 3$ warna.

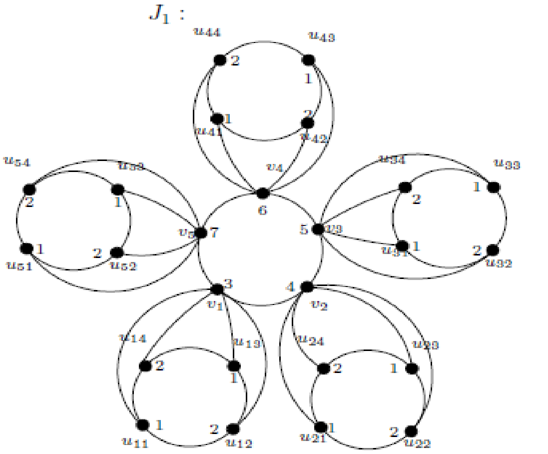
■

Bilangan kromatik dominasi dari graf hasil operasi korona Lingkaran ($C_m$) dengan Lingkaran ($C_n$) ditentukan oleh Lingkran ($C_m$) sebab Lingkaran ($C_n$) minimal harus diwarnai dengan 2 atau 3 warna sedangkan Lingkaran ($C_m$) minimal harus diwarnai sebanyak $m$ warna agar memenuhi sifat kromatik dominasi minimum. Lebih jelasnya, Perhatikan Contoh II.4.1 dan Contoh II.4.2 berikut ini.

**Contoh II.4.1**

Diberikan Lingkaran $C_5$ dan $C_4$, Jika Graf $J_1 = C_5 \odot C_4$ adalah graf hasil operasi korona Lingkaran dengan Lingkaran, maka dengan menggunakan Observasi II.4 maka didapatkan bahwa $\chi_d(J_1) = 7$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 8.

$J_1$ :

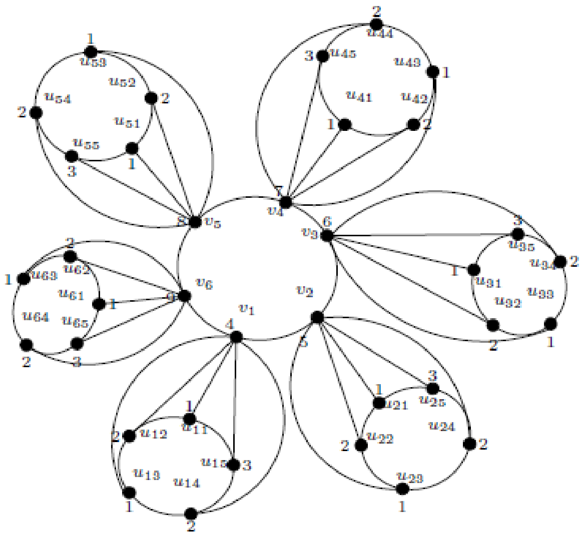


**Gambar 8.** Kromatik Dominasi $J_1$

**Contoh II.4.2**

Diberikan Lingkaran $C_6$ dan $C_5$, Graf $J_2 = C_6 \odot C_5$ adalah graf hasil korona Lintasan $C_6$ dan $C_5$, maka dengan menggunakan Observasi II.4 maka didapatkan bahwa $\chi_d(J_2) = 9$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 9

$J_2$ :



**Gambar 9.** Kromatik Dominasi $J_2$

*E. Kromatik Dominasi Graf Lengkap dengan Lingkaran atau Lingkaran.*

**Observasi II.5.** (***Kromatik Dominasi*** $K_m \odot P_n$) *Diberikan graf Lengkap $K_m$ dan Lintasan $P_n$ masing-masing memiliki order $m \geq 1, n \geq 2, m, n \in N$. Jika $L$ adalah graf hasil operasi korona dari $K_m$ dan $P_n$ maka bilangan kromatik dominasi dari*$\chi_d(\mathrm{L}) = |\mathrm{V}(\mathrm{K_m})| + 2$.

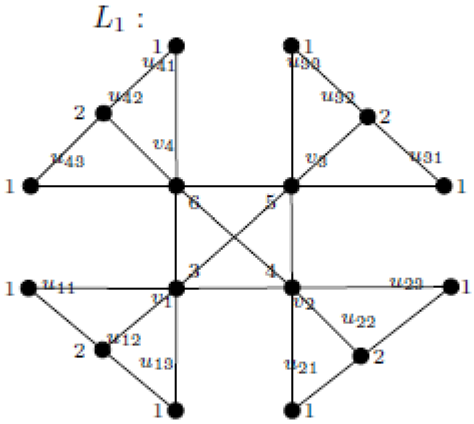
*Bukti.* Misalkan Graf I adalah graf hasil korona dari graf $K_m$ dan $P_n$, yaitu $L = K_m \odot P_n$. Order dari Lingkaran $|K_m| = m$ dan Lintasan $|P_n| = n$. Katakan $v_1, v_2, \ldots, v_m$ adalah simpul-simpul graf $K_m$ dan $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}$ adalah simpul-simpul $P_n$ yang melekat dengan simpul ke-$v_i$ untuk $1 \leq i \leq m$. Konstruksi pewarnaan kromatik dominasi $f : V(L) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots \chi_d(L)\}$ dengan menggunakan $|V(K_m)| + 2$ warna sebagai berikut : untuk $u_{i(2j+1)}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{i(2j)}$ katakan $f(u_{i(2j)}) = 2$ kemudian untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 2 + i$, untuk setiap $1 \leq i \leq m, 0 \leq j$. Pewarnaan ini merupakan pewarnaan kromatik dominasi dari $I$, karena pewarnaan ini tetap merupakan pewarnaan simpul (*proper coloring*) dan himpunan dominasi minimum dari graf $I$ mendominasi setiap simpul dari kelas warna dengan kata lain simpul dengan kelas warna 1 dan 2 bertetangga dengan simpul dengan warna yang unik. Dengan demikian, didapatkan bahwa $\chi_d(L) = |V(K_m)| + 2$.

■

Bilangan kromatik dominasi dari graf hasil operasi korona graf Lengkap ($K_m$) dengan Lintasan ($P_n$) ditentukan oleh order graf Lengkap ($K_m$) sebab Lintasan ($P_n$) minimal harus diwarnai dengan 2 warna sedangkan graf Lengkap ($K_m$) minimal harus diwarnai sebanyak $m$ warna agar memenuhi sifat kromatik dominasi minimum. Lebih jelasnya, Perhatikan Contoh II.5.1 dan Contoh II.5.2 berikut ini.

**Contoh II.5.1**.

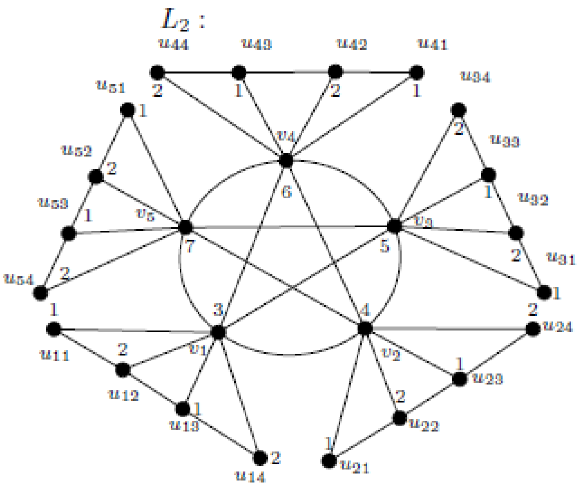
Diberikan graf Lengkap $K_4$ dan Lintasan $P_3$, Jika Graf $L_1 = K_4 \odot P_3$ adalah graf hasil operasi korona graf Lengkap dan Lingkaran, maka dengan menggunakan Observasi II.5 maka didapatkan bahwa $\chi_d(L_1) = 6$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 10.




**Gambar 10.** Kromatik dominasi $L_1$.

**Contoh II.5.2**

Diberikan graf Lengkap $K_5$ dan Lintasan $P_4$ Jika Graf $L_2 = K_5 \odot P_4$ adalah graf hasil operasi korona graf Lengkap dan Lingkaran, maka dengan menggunakan Observasi II.5 maka didapatkan bahwa $\chi_d(L_2) = 7$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 11.




**Gambar 11.** Kromatik dominasi $L_2$.

**Observasi II.6** (***Kromatik Dominasi*** $K_m \odot C_n$ )
*Diberikan Graf lengkap* $K_m$ *dan Lingkaran* $C_n$ *masing-masing memiliki order* $m \geq 1, n \geq 4,\ m,n \in\ N$. *Jika M adalah graf hasil operasi korona dari* $K_m$ *dan* $C_n$, *maka bilangan kromatik dominasi dari* $\chi_d(M) =$

$$\begin{cases} |V(K_m)| + 2 \text{ , } n \text{ genap} \\ |V(K_m)| + 3 \text{ , } n \text{ gasal} \end{cases}$$

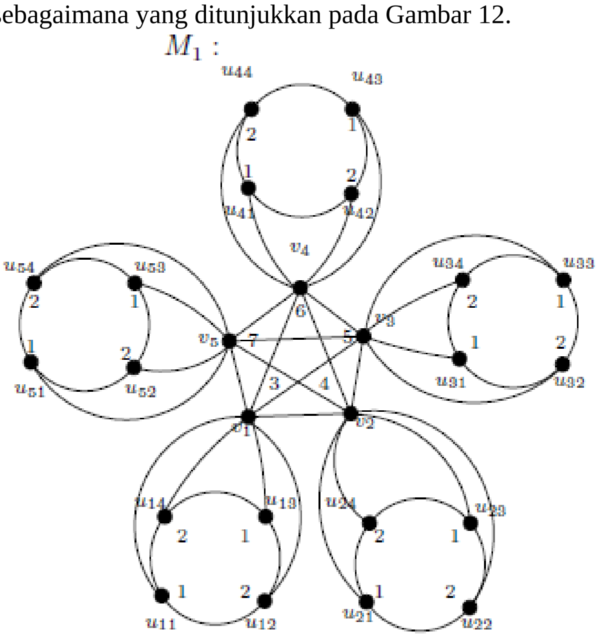
*Bukti.* Misalkan Graf $M$ adalah graf hasil korona dari graf $K_m$ dan $C_n$, yaitu M= $K_m \odot C_n$. Order dari graf lengkap $|K_m| = m$ dan Lingkaran $|C_n| = n$. Katakan $v_1, v_2, \ldots, v_m$ adalah simpul-simpul graf $K_m$ dan $u_{\{i1\}}, u_{\{i2\}}, \ldots, u_{\{in\}}$ adalah simpul-simpul $C_n$ yang melekat dengan simpul ke-$v_i$ untu $1 \leq i \leq m$. Konstruksi pewarnaan kromatik dominasi $f : V(M) \to \{1, 2, 3, \ldots \chi_d(M)\}$ terdapat dua kasus : kasus I ketika $C_n$. memiliki order genap. Kasus II ketika $C_n$ memiliki order gasal. Kasus I untuk $u_{\{i(2j+1)\}}$ katakan $f\left(u_{\{i(2j+1)\}}\right) = 1$, untuk $u_{\{i(2j)\}}$ katakan $f\left(u_{\{i(2j)\}}\right) = 2$, dan untuk untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 2 + i$. Untuk setiap $1 \leq i \leq m, 0 \leq j$ \$ Maka kita telah selesai dengan $|V(C_m)| + 2$ warna. Kasus II untuk $u_{\{i(2j+1)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j+1)\}}) = 1$, untuk $u_{\{i(2j)\}}$ katakan $f(u_{\{i(2j)\}}) = 2$,untuk $u_{\{in\}}$ katakan $f(u_{\{in\}}) = 3$ dan untuk untuk $v_i$ katakan $f(v_i) = 3 + i$. Kasus II ini menghasilkan pewarnaan kromatik dominasi karena setiap simpul $v_i$ mendominasi dirinya sendiri dan mendominasi kelas warna 1, 2, dan 3. Sebaliknya setiap kelas warna 1, 2, 3 mendominasi warna yang unik. Maka kita telah selesai dengan $|V(K_m)| + 3$ warna.

■

Bilangan kromatik dominasi dari graf hasil operasi korona graf Lengkap $(K_m)$ dengan Lingkaran $(C_n)$ ditentukan oleh graf Lengkap $(K_m)$ sebab Lingkaran $(C_n)$ minimal harus diwarnai dengan 2 atau 3 warna sedangkan graf Lengkap $(K_m)$ minimal harus diwarnai sebanyak m warna agar memenuhi sifat kromatik dominasi minimum. Lebih jelasnya, Perhatikan Contoh II.6.1 dan Contoh II.6.2 berikut ini.

**Contoh II.6.1**

Diberikan graf Lengkap $K_5$ dan Lingkaran $C_4$, Jika Graf $M_1 = K_5 \odot C_4$ adalah graf hasil operasi korona graf Lengkap dan Lingkaran, maka dengan menggunakan Observasi II.6 maka didapatkan bahwa $\chi_d(M_1) = 7$, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 12.




**Gambar 12.** Kromatik Dominasi $M_1$

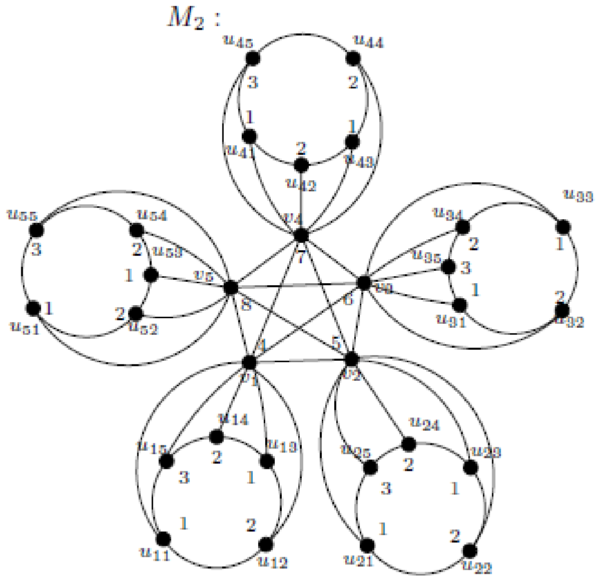
**Contoh II.6.2**

Diberikan graf Lengkap $K_5$ dan Lingkaran $C_5$, Jika Graf $M_2 = K_5 \odot C_5$ adalah graf hasil operasi korona graf Lengkap dan Lingkaran, maka dengan menggunakan Observasi II.6 maka didapatkan bahwa _d(M2) = 8, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 13**.**

Apabila diperhatikan Bilangan kromatik dominasi dari $P_m \odot P_n$, $C_m \odot P_n$ dan $K_m \odot P_n$ ketiganya memiliki kesamaan bentuk, perbedaan nya hanya pada graf pertama saja yakni $P_m, C_n$ dan $K_m$, sehingga dari ketiga bentuk yang sama tersebut dapat dituliskan bentuk umum dari bilangan kromatik dominasi dari sebarang graf terhubung sederhana $G_m$ dengan Lintasan $P_n$ sebagai berikut.

**Teorema II.1**. *Diberikan sebarang graf terhubung dengan order* m ($G_m$) *dan Lintasan dengan order* n ($P_n$). *Bilangan kromatik dominasi* $\chi_d(G_m \odot P_n) = |V(G_m)| + 2$, *untuk* $m \geq 1, n \geq 2$.

Demikian pula bentuk $P_m \odot C_n, C_m \odot C_n$ dan $K_m \odot C_n$ secara umum ialah sama yakni untuk n ganjil ditambah 3 warna dan untuk n genap ditambah 2 warna, sedangkan Lingkaran $C_m$, Lintasan $P_m$ dan graf Lengkap $K_m$ diwarnai dengan m warna, sehingga dari ketiga bentuk yang sama tersebut dapat dituliskan bentuk umum dari bilangan kromatik dominasi dari sebarang graf terhubung sederhana $G_m$ dengan Lingkaran $C_n$ sebagai berikut.



**Gambar 13**. Kromatik Dominasi $M_2$

**Teorema II.2.** *Diberikan Graf lengkap* $G_m$ *dan Lingkaran* $C_n$ *masing-masing memiliki order* $m \geq 1, n \geq 4$, $m, n \in N$. *Jika M adalah graf hasil operasi korona dari* $G_m$ *dan* $C_n$, *maka bilangan kromatik dominasi dari*

$$\chi_d(G_m \odot C_n) = \begin{cases} |V(G_m)| + 2, n \text{ genap} \\ |V(G_m)| + 3, n \text{ gasal} \end{cases}$$

## III. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada bagian sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal berikut:

1. Diberikan sebarang graf terhubung dengan order m ($G_m$) dan Lintasan dengan order n ($P_n$). Bilangan kromatik dominasi $\chi_d(G_m \odot P_n) = |V(G_m)| + 2$, untuk $m \geq 1$; $n \geq 2$.
2. Diberikan sebarang graf terhubung dengan order $m$ ($G_m$) dan Lingkaran dengan order $n$ ($C_n$). Bilangan kromatik dominasi $\chi_d(G_m \odot C_n) = |V(G_m)| + 2$, dan $|V(G_m)| + 3$, berturut-turut untuk $n$ genap, dan $n$ gasal.


## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis Muhammad A. Hadi mengucapkan terima kasih kepada Direktorat Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia yang telah memberikan dukungan finansial melalui Beasiswa Bidik Misi tahun 2012-2016.


## DAFTAR PUSTAKA


[1] N. Hartsfield and G. Ringel, *Pearls in graph theory: a comprehensive introduction.* Courier Corporation, 2013.

[2] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. Slater, *Fundamentals of Domination in graphs*. CRC Press, 1998.

[3] C. E. Go and S. R. Canoy Jr, "Domination in the corona and join of graphs," in *International Mathematical Forum*, vol. 6, no. 16, 2011, pp 763–771.

[4] A. Benjamin, G. Chartrand, and P. Zhang, *The Fascinating World of Graph Theory*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2015.

[5] R. Gera, C. Rasmussen, and S. Horton, "Dominator colorings and safe clique partitions," *Congressus numerantium*, vol. 181, p. 19, 2006.

[6] S. Arumugam, J. Bagga, and K. R. Chandrasekar, "On dominator colorings in graphs," *Proceedings-Mathematical Sciences*, vol. 122, no. 4, pp. 561–571, 2012.

[7] R. Gera, "On the dominator colorings in bipartite graphs," in *Information Technology, 2007. ITNG'07. Fourth International Conference on*. IEEE, 2007, pp. 947–952.