

Penerapan Diagram Bivariat Poisson pada Pengendalian Kualitas *Ring* Botol di PT. “X”

Faisol Yusuf, Muhammad Mashuri, Wibawati

Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111

E-mail: wibawati@statistika.its.ac.id

Abstrak—Studi penerapan diagram kontrol Bivariat Poisson diaplikasikan pada data proses produksi *ring* New Teh botol di PT. “X”. Jenis variabel penelitian kualitas *ring* botol meliputi jumlah cacat *crack under ring* dan *crack on ring*. Kepekaan batas kendali diagram kontrol Bivariat Poisson cenderung terlihat pada data yang mempunyai nilai korelasi tinggi, sehingga penelitian ini akan dilakukan pada studi kasus data yang berkorelasi rendah (Data 1) dan berkorelasi tinggi (Data 2). Pengendalian kualitas produksi juga akan diterapkan pada diagram kontrol *c* univariat dengan mengabaikan nilai keeratan antar variabel. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan diagram kontrol Bivariat Poisson pada data berkorelasi tinggi cenderung lebih sensitif daripada diagram kontrol *c* univariat.

Kata Kunci—*Crack Under Ring, Crack On Ring, Diagram Kontrol Bivariat Poisson, Korelasi Rendah, Korelasi Tinggi.*

I. PENDAHULUAN

PENGENDALIAN kualitas menjadi salah satu poin penting dalam perusahaan bidang industri atau jasa dengan memperhatikan dan menjaga produk agar terjaga kualitasnya. Dalam proses menentukan suatu kualitas barang yang diklasifikasikan sebagai cacat dan tidak cacat dinamakan sifat atau atribut [1]. Penerapan peta *c* dan peta *u* secara luas mengaplikasikan distribusi Poisson pada jumlah kecacatan pada proses univariat. Terkadang terdapat lebih dari satu karakteristik kualitas yang juga ditetapkan dalam banyak industri manufaktur, kemudian dalam beberapa kasus lain juga terdapat karakteristik kualitas yang mempunyai hubungan keeratan satu sama lain atau berkorelasi. Konsep dasar dari analisis multivariat merupakan metode analisis statistik yang digunakan untuk mengolah data secara bersama dengan banyak variabel [2]. Jika pemeriksaan objek secara atribut dilakukan pada lebih dari 1 karakteristik kualitas, diagram kontrol yang digunakan adalah diagram kontrol multivariat atribut [3].

Ketika fokus utama kecacatan berada pada jumlah cacat masing-masing unit sampel dan kecacatan diklasifikasikan menjadi lebih dari 2 kategori, maka data dimodelkan dengan menggunakan Multivariat Poisson. Penerapan konsep dasar diagram kontrol Multivariat Poisson dibangun berdasarkan total dari masing-masing kecacatan atau ketidaksesuaian ke dalam satu grafik dan berdistribusi Poisson pada masing-masing karakteristik kualitasnya [4]. Prosedur kontrol multivariat dapat digunakan untuk menangkap keeratan hubungan diantara variabel lebih sensitif daripada aplikasi

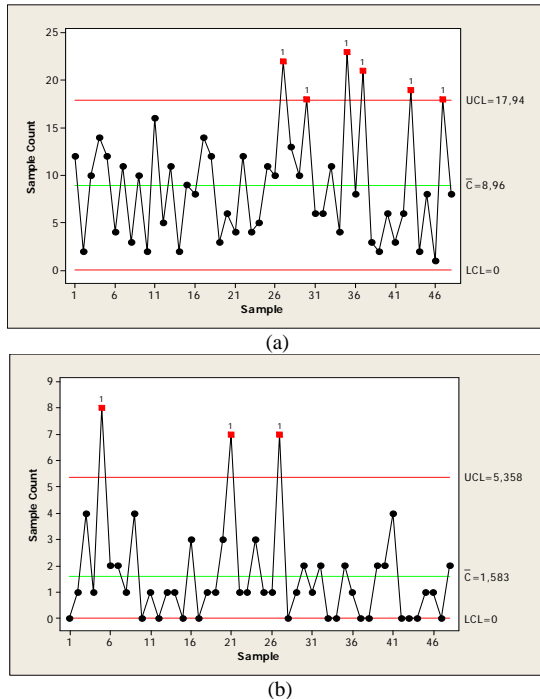
secara univariat masing-masing variabel [5]. Rujukan [6] menerapkan konsep diagram kontrol Multivariat *np* (*Mnp*) pada kasus pengendalian kualitas proses produksi rokok batangan untuk bagian Sigaret Kretek Tangan. Kemudian rujukan [7] melakukan penelitian tugas akhir tentang pengendalian proses produksi tipe botol IBTC 175 ml dengan menggunakan diagram kontrol *p* multivariat. Selama ini tim *Quality Control* PT. “X” hanya sebatas menggunakan diagram pareto dalam mencari informasi mengenai kriteria kecacatan terbanyak. Salah satu konsumen yaitu PT. ‘X’ sering komplain mengenai kualitas produk botol PT. “X” yang banyak ditemukan cacat pada *ring* botol. Kejadian ini sangat merugikan PT. ‘X’, karena banyak sekali botol yang pecah pada tahap *capping*.

Menindaklanjuti komplain PT. ‘X’, telah ditemukan beberapa karakteristik kualitas yang dinilai oleh tim bagian produksi mempunyai hubungan satu sama lain, yaitu banyaknya cacat *crack on ring* dengan *crack under ring*. Terjadinya cacat berdasarkan kedua karakteristik kualitas tersebut mempunyai keeratan hubungan dalam proses produksi. Berdasarkan studi kasus kecacatan tersebut perlu pengontrolan kualitas secara serentak dalam melihat stabilitas proses produksi *ring* botol. Sebagai pembanding dalam melihat kesensitifan diagram kontrol Bivariat Poisson, proses analisis akan dibandingkan dengan diagram kontrol *c* univariat. Hasil perbandingan dari penerapan diagram kontrol *c* univariat dengan diagram kontrol Bivariat Poisson akan dilihat berdasarkan jumlah data *out of control*.

II. METODOLOGI

Penelitian ini menggunakan data sekunder yang diperoleh dari Divisi *Quality Control* pada tahap *sortir* bagian Pos unit 1 tipe New Teh botol. Data yang digunakan meliputi 2 data proses produksi dengan periode yang berbeda. Data 1 diperoleh pada produksi tanggal 2 Juli 2011 sampai 18 Agustus 2011, sedangkan data 2 mulai 3 November sampai 20 Desember 2011. Klasifikasi karakteristik jenis cacat *ring* botol dikelompokkan menjadi 2 kategori, yaitu jumlah cacat *crack under ring* dan *crack on ring*. Pengamatan dalam satu periode proses produksi yang digunakan sebanyak 48 hari pengamatan dengan ukuran sampel dalam setiap pengamatan sebanyak 192 botol.

A. Rancangan Kerja Diagram Kontrol *c* Univariat



Gambar. 1. Diagram kontrol *c* univariat variabel *crack under ring* (a) dan *crack on ring* (b) pada data 1 proses produksi *ring* New Teh Botol.

Diagram kontrol *c* menganggap bahwa terjadinya kecacatan dalam sampel berukuran tetap dapat dimodelkan distribusi Poisson dengan baik. Jika nilai standar tidak diberikan, maka *c* dapat ditaksir dengan banyak ketidaksesuaian rata-rata dalam sampel pendahuluan unit pemeriksaan yaitu \bar{c} . Dalam hal ini grafik pengendaliannya mempunyai Batas Kendali Atas (BKA), Garis Pusat (GP) dan Batas Kendali Bawah (BKB) sebagai berikut :

$$BKA = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \tag{1}$$

$$GP = \bar{c} \tag{2}$$

$$BKB = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \tag{3}$$

B. Rancangan Kerja Diagram Kontrol Multivariat Poisson

Misalkan variabel X_j merupakan jumlah ketidaksesuaian atau kecacatan berdasarkan karakteristik kualitas $j, j = 1, 2, \dots, p$, dengan data sebagai $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$. Masing-masing X_j mengikuti distribusi poisson dengan rata-rata cacat tiap variabel adalah λ_j dan kovarians (X_j, X_k) adalah θ_0 , dimana $j \neq k$. Ditetapkan perhitungan nilai statistik D adalah jumlahan dari semua nilai X_j [4] :

$$D = \sum_{j=1}^p x_j, j = 1, 2, \dots, p \tag{4}$$

Menurut rujukan [8], Bivariat Poisson model dikembangkan secara terperinci terkait distribusi dari statistik D untuk $p = 2$, berikut bentuk fungsi distribusi probabilitas [9] :

$$P(D = d) = \exp\left[-(\lambda_1 + \lambda_2 - \theta_0)\right] \sum_{i=0}^{d/2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\theta_0)^{d-2i} \theta_0^i}{(d-2i)!i!}, \tag{5}$$

pada kasus $p > 3$, fungsi distribusi probabilitas dari statistik D dapat diperoleh perhitungannya melalui induksi matematika berikut :

$$P(D = d) = \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0\right]\right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j - p\theta_0\right)^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)!i!}, \tag{6}$$

Batas kendali diagram Multivariat Poisson dapat ditentukan dari pengambilan nilai yang dianggap paling mendekati pada nilai atas dan bawah $\alpha/2$ dari distribusi pada persamaan (6), maka batas kendali diagram terpenuhi pada persamaan berikut

$$P(D > BKA) = \sum_{d=BKA}^{\infty} \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0\right]\right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j - p\theta_0\right)^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)!i!} \leq \frac{\alpha}{2} \tag{7}$$

$$= 1 - \sum_{d=0}^{BKA-1} \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0\right]\right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j - p\theta_0\right)^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)!i!} \leq \frac{\alpha}{2}$$

dan

$$P(D < BKB) = \sum_{d=0}^{BKB} \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0\right]\right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j - p\theta_0\right)^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)!i!} \leq \frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

Proses Multivariat Poisson saat nilai λ relatif kecil pada masing-masing variabel karakteristik kualitas X_j , kemudian secara umum mempunyai nilai kecil atau bernilai 0 dari nilai statistik D akan menyebabkan probabilitas $P(D = 0)$ lebih besar daripada $\alpha/2$ pada sebagian besar data, maka penentuan batas kendali bawah ditetapkan bernilai 0 dan hanya batas kendali atas yang dicari nilainya melalui persamaan berikut :

$$P(D > BKA) = \sum_{d=BKA}^{\infty} \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0\right]\right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j - p\theta_0\right)^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)!i!} \leq \alpha \tag{9}$$

$$= 1 - \sum_{d=0}^{BKA-1} \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^p \lambda_j - (p-1)\theta_0\right]\right\} \sum_{i=0}^{d/p} \frac{\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j - p\theta_0\right)^{d-pi} \theta_0^i}{(d-pi)!i!} \leq \alpha$$

Secara umum dalam mendapatkan nilai batas kendali atas pada persamaan (9) haruslah mendapatkan nilai probabilitas yang mendekati nilai α (0,0027).

Tabel 1. Nilai korelasi dan *p-value* data produksi *ring* New Teh Botol

Data	Pasangan	Korelasi	<i>P-Value</i>
Data 1	<i>Crack Under Ring</i> <i>Crack On Ring</i>	0,069	0,642
Data 2	<i>Crack Under Ring</i> <i>Crack On Ring</i>	0,338	0,019

III. HASIL ANALISIS

Proses pengontrolan proses produksi *ring* New Teh Botol dilakukan dengan membuat diagram kontrol *c* univariat dan Bivariat Poisson, serta proses evaluasi kemampuan diagram kontrol berdasarkan jumlah data *out of control*. Terlebih dahulu menghitung nilai korelasi antara variabel karakteristik jumlah cacat *crack under ring* dengan jumlah cacat *crack on ring*. Hipotesis dan tabel nilai korelasi ditampilkan sebagai

berikut : $H_0 : \rho = 0$; $H_1 : \rho \neq 0$; Statistik Uji

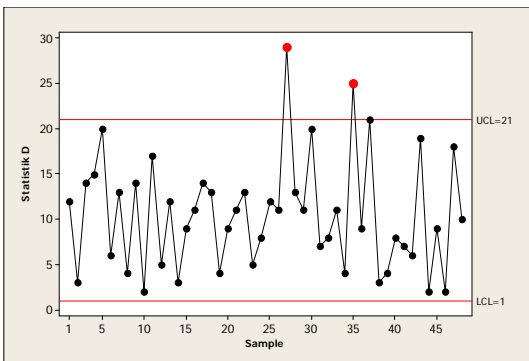
$$r_{hitung} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Jika $p\text{-value} < \alpha$ (0,05) atau $r_{hitung} > r_{tabel(0,05;n-2)}$ maka tolak H_0 , yang berarti terdapat hubungan antar variabel satu dengan yang lain.

Berdasarkan Tabel 1 menunjukkan bahwa data 1 mempunyai nilai korelasi rendah dan nilai $P\text{-value} > \alpha$, artinya gagal tolak H_0 , sehingga tidak terdapat hubungan antar variabel karakteristik. Secara pengujian statistika, variabel *crack under ring* dan *crack on ring* pada data 1 tidak mempunyai keeratn hubungan, akan tetapi dalam proses produksi, terdapat fenomena keeratn hubungan dalam setiap kemunculan 2 jenis cacat tersebut pada proses pembuatan botol, sehingga asumsi adanya keterkaitan antar variabel tetap ada dan keeratannya rendah. Selanjutnya pada data 2 mempunyai nilai $P\text{-value} < \alpha$, artinya tolak H_0 , sehingga dapat dikatakan terdapat keeratn hubungan antar variabel karakteristik *crack under ring* dengan *crack on ring*. Setelah perhitungan nilai korelasi, berikut penerapan diagram kontrol c univariat pada data 1 :

Penerapan diagram kontrol c univariat berdasarkan variabel *crack under ring* dan *crack on ring* menghasilkan kondisi yang belum terkendali (Gambar 1), karena pada variabel *crack under ring* terdapat 6 titik *out of control* (Gambar 1a), sedangkan variabel *crack on ring* sebanyak 3 titik (Gambar 1b). Selanjutnya penerapan diagram kontrol Bivariat Poisson pada data 1 ditampilkan sebagai berikut:

Penerapan secara serentak 2 variabel karakteristik dengan diagram kontrol Bivariat Poisson menghasilkan kondisi yang belum terkendali (Gambar 1), karena terdapat 2 titik *out of*

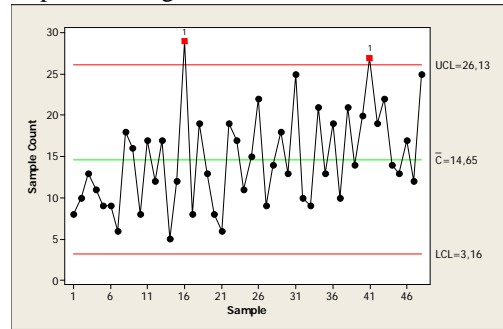


Gambar. 2. Diagram kontrol Bivariat Poisson pada data 1 (korelasi rendah) proses produksi *ring* New Teh Botol.

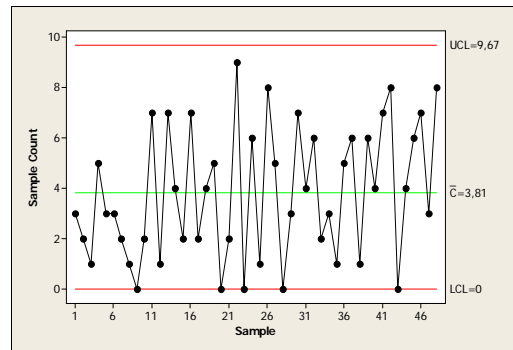
control. Selanjutnya penerapan diagram kontrol c univariat pada data 2 ditampilkan sebagai berikut :

Penerapan diagram kontrol c univariat berdasarkan variabel *crack under ring* menghasilkan kondisi yang belum terkendali (Gambar 3a), karena terdapat 2 titik *out of control*, sedangkan berdasarkan variabel *crack on ring* menghasilkan kondisi yang sudah terkendali (Gambar 3b). Selanjutnya penerapan diagram kontrol Bivariat Poisson pada data 2 ditampilkan sebagai berikut :

Penerapan secara serentak 2 variabel karakteristik dengan diagram kontrol Bivariat Poisson menghasilkan kondisi yang belum terkendali (Gambar 4), karena terdapat 3 titik *out of control*. Salah satu cara dalam melihat kemampuan diagram kontrol yaitu, melihat jumlah titik *out of control*. Dalam penelitian ini akan dilihat pengontrolan kualitas proses produksi jika diaplikasikan dengan menggunakan diagram kontrol c univariat dan diagram kontrol Bivariat Poisson. Perbandingan jumlah data *out of control* studi kasus data PT. “X” ditampilkan sebagai berikut :

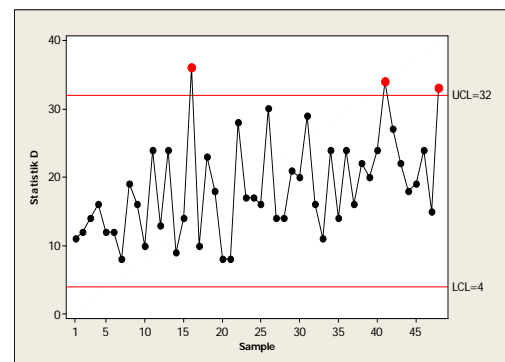


(a)



(b)

Gambar. 3. Diagram kontrol c univariat variabel *crack under ring* (a) dan *crack on ring* (b) pada data 2 proses produksi *ring* New Teh Botol.



Gambar. 4. Diagram kontrol Bivariat Poisson pada data 2 (korelasi tinggi) proses produksi *ring* New Teh Botol.

Pengontrolan kualitas proses produksi dengan diagram kontrol c univariat pada data yang berkorelasi rendah (data 1) menghasilkan jumlah data *out of control* sebanyak 9 data, dengan rincian 6 data berdasarkan variabel *crack under ring*, dan 3 data berdasarkan *crack on ring*, sedangkan penerapan diagram kontrol Bivariat Poisson menghasilkan 2 data *out of*

control, kemampuan diagram kontrol Bivariat Poisson pada kasus korelasi rendah di PT. “X” cenderung kurang sensitif dalam mendeteksi data *out of control*, karena bisa dimungkinkan tidak terpenuhinya signifikansi korelasi pada $\alpha = 0,05$ sehingga cenderung bersifat independen. Selanjutnya penerapan diagram kontrol Bivariat Poisson pada kasus data berkorelasi tinggi (data 2) menghasilkan jumlah data *out of control* sebanyak 3 data, sedangkan diagram kontrol *c* univariat hanya mendeteksi 2 data (Tabel 2), artinya pada kasus data signifikan berkorelasi tinggi, cenderung lebih tepat jika menggunakan diagram kontrol Bivariat Poisson, karena pada perhitungan batas kendali diagram selalu memperhitungkan besaran nilai korelasi.

Tabel 2.

Jumlah data *out of control* diagram kontrol *c* dan diagram kontrol Bivariat Poisson pada proses produksi *ring* New Teh Botol

Data	Diagram Kontrol <i>c</i> Univariat		Diagram Kontrol Bivariat Poisson
	<i>C. Under Ring</i>	<i>C. On Ring</i>	
Data 1*	6	3	2
Data 2**	2	0	3

*Data 1 – Tidak signifikan berkorelasi pada $\alpha = 0,05$

**Data 2 – signifikan berkorelasi pada $\alpha = 0,05$

IV. KESIMPULAN

Diagram kontrol *c* univariat pada data berkorelasi rendah, memberikan kondisi proses yang tidak terkendali untuk semua variabel, sedangkan pada data yang berkorelasi tinggi hanya variabel *crack on ring* yang berada dalam kondisi terkendali. Penerapan diagram kontrol Bivariat Poisson pada data berkorelasi rendah maupun tinggi, memberikan kondisi proses yang tidak terkendali. Pada kasus data berkorelasi tinggi, diagram kontrol Bivariat Poisson lebih sensitif daripada diagram kontrol *c* univariat, sebaliknya pada kasus data korelasi rendah, diagram kontrol *c* univariat lebih sensitif daripada diagram kontrol Bivariat Poisson. Saran yang dapat diberikan bagi PT. “X” berupa perlunya melakukan pengendalian kualitas secara serentak pada kasus variabel karakteristik yang dianggap mempunyai aspek korelasi tinggi dengan menggunakan diagram kontrol Bivariat Poisson.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Montgomery. Douglas C, *Pengendalian Kualitas Statistika*. Diterjemahkan oleh Soejoeti Z Yogyakarta: Gajah Mada University Press (1998).
- [2] Johnson. A. R. and Wichern. D. W. “Applied Multivariate Statistical Analysis,” *Plastics*, 5th. New Jersey: Prentice-Hall, Upper Saddle River (2002).
- [3] Mukhopadhyay. A. R, “Multivariate Attribute Control Chart Using Mahalanobis D^2 Statistic,” *Journal of Applied Statistics*, Vol. 35, No. 4 (2008) 421–429.
- [4] J. E. Chiu, T. I. Kuo, “Attribute control chart for multivariate Poisson distribution,” *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 1 (2008) 149–158.
- [5] Lu. X. S, Xie, M. Goh, and T. H. Lai, C. D, “Control chart for multivariate attribute Processes,” *Int J. Product. Res*, Vol. 36 (1998) 3347–3489.
- [6] Weny. “Pengontrolan Kualitas Produksi Rokok Tahap Batangan di Unit SKT (Sigaret Kretek Tangan) Di PT X Menggunakan Diagram Kontrol Multivariat *np* (*Mnp Chart*). Laporan Tugas Akhir Jurusan Statistika. Surabaya: ITS (2010).
- [7] Nanda. K. M. “Pengontrolan Kualitas Produk PT. “X” (Persero) Gresik Menggunakan Diagram *p* Multivariat. Laporan Tugas Akhir Jurusan Statistika. Surabaya: ITS (2011).
- [8] Holgate. P, “Estimation for the bivariate Poisson distribution,” *Biometrika*, No. 51 (1964) 241–245.
- [9] Kemp. C. D. and Kemp. A. W, “Some properties of the ‘Hermite’ distribution,” *Biometrika*, No. 52 (1965) 381–394.