Penerapan Metode *Bayes* dalam Menentukan Model Estimasi Reliabilitas Pompa *Submersible* pada Rumah Pompa Wendit I PDAM Kota Malang

Widya Arrya Septiana dan Soehardjoepri
Departemen Matematika, Fakultas Matematka dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: djoepri.its@gmail.com

Abstrak—**Pemeliharaan sistem dan peralatan–peralatan dalam suatu perusahaan merupakan salah satu faktor penting dalam mendukung produktivitas dan kualitas produk yang baik. Pemeliharaan peralatan produksi dengan melakukan kontrol keandalan (reliabilitas) dapat mengurangi gangguan pada sistem produksi sehingga mampu mengoptimalkan pendapatan keuntungan bagi perusahaan. PDAM (Perusahaan Daerah Air Minum) Kota Malang, selaku penyedia layanan air bersih sering kali menemui kendala dalam proses produksi air akibat kerusakan pada pompa *submersible,* sehingga mengalami kerugian yang cukup besar. Sebagai upaya mengurangi kerugian dengan mencegah kerusakan pompa *submersible*, PDAM Kota Malang perlu untuk mengetahui nilai reliabilitas pompa untuk menjadwalkan waktu pemeliharaan dengan tepat. Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan nilai reliabilitas dari model estimasi relibilitas dengan metode *Bayes* menggunakan distribusi terbaik. Data yang digunakan adalah data waktu antar waktu kerusakan pompa *submersible* pada Rumah Pompa Wendit I PDAM Kota Malang. Model yang diperoleh diterapkan untuk mendapatkan nilai reliabilitas pompa yaitu nilai reliabilitas Pompa I adalah 0.403, Pompa II adalah 0.69464 dan Pompa III adalah 0.7701. Sedangkan nilai reliabilitas untuk sitem perpompaan pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang adalah 0.9581.**

Kata Kunci—**Metode Bayes, Pompa Submersible, Reliabilitas.**

I. PENDAHULUAN

PERUSAHAAN yang bergerak di bidang jasa maupun produksi produk sangat memperhatikan kualitas pelayanan dan kualitas produk untuk memuaskan pelanggan demi mendapat keuntungan yang memungkinkan. [1]. Salah satu faktor yang memiliki potensi besar dalam meningkatkan produktivitas dan profitabilitas yang optimal adalah membentuk manajemen pemeliharaan yang tepat [2]. Pemeliharaan peralatan produksi dengan melakukan kontrol keandalan (reliabilitas) dapat mengurangi gangguan pada sistem produksi sehingga mampu mengoptimalkan pendapatan keuntungan bagi perusahaan [3].

PDAM Kota Malang merupakan salah satu perusahaan milik daerah yang mempunyai peran penting dalam melaksanakan pengelolahan dan memberikan pelayanan air bersih untuk meningkatkan kesajahteraan masyarakat kota Malang. PDAM kota Malang hampir setiap bulan mengalami gangguan pada pompa air baku sehingga mengakibatkan kerugian yang cukup besar. Oleh karena itu, sebelum dilakukan penjadwalan pemeliharaan, PDAM Kota Malang perlu untuk mengetahui nilai reliabilitas dari pompa *submersible* agar dapat mencegah terjadinya kerugian PDAM akibat kerusakan pompa. Penelitian Tugas Akhir ini dilakukan untuk mengetahui model estimasi reliabilitas guna mendapatkan nilai reliabiltas pompa *submersible*.

Pada penelitian ini akan didapatkan model estimasi reliabilitas distribusi weibull dan model estimasi reliabilitas distribusi lognormal dengan metode *Bayes*. Data yang digunakan adalah data waktu antar waktu kerusakan pompa I, pompa II dan pompa III pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang dari Januari 2008 hingga Februari 2017. Data tersebut akan diuji kecocokan distribusinya menggunakan *Index of Fit* dan *Goodness of Fit* untuk menentukan penggunaan distribusi terbaik dalam mengestimasi reliabilitas pompa *submersible* air baku. Distribusi yang digunakan dalam menentukan model estimasi reliabilitas dengan metode *Bayes* dalam penelitian ini adalah distribusi weibull dan distribusi lognormal. Model estimasi reliabilitas yang digunakan dalam mencari nilai reliabilitas pompa *submersible* pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang apada tanggal 15 Maret 2017 sebagai salah satu output dari penelitian Tugas Akhir ini, diharapkan dapat menjadi bahan pertimbangan PDAM Kota Malang dalam menentukan waktu pemeliharaan maupun waktu pergantian pompa *submersible* PDAM Kota Malang.

II. DASAR TEORI

A. *Metode Bayes*

Sebuah model statistik *Bayes* terbentuk dari parameter model statistik $f(t|\theta)$ dan distribusi prior $\pi(\theta)$. Secara umum peluang dengan menggunakan teorema *Bayes* dideskripsikan dengan keadaan jika A dan E adalah kejadian di mana $(E) \neq 0$, $P(A|E)$ dan $P(E|A)$ saling berhubungan. Berikut iniadalah peluang terjadi peristiwa E dengan syarat A [3]:

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)\,P(A)}{P(E)} \tag{1}$$

B. *Fungsi Reliabilitas*

Reliabilitas adalah peluang sebuah komponen atau suatu sistem akan bekerja sesuai fungsinya pada jangka waktu tertentu ketika digunakan dibawah kondisi operasional tertentu [4]. Berdasarkan intensitas kerusakannya, distribusi probabilistik yang digunakan dalam menentukan nilai reliabilitas dibagi menjadi dua, yaitu apabila model nilai kerusakan konstan dapat menggunkan distribusi eksponensial sedangkan apabila model nilai kerusakan tidak konstan dapat distribusi weibull, normal dan lognormal.

1. Distribusi Eksponensial

Sebuah variabel acak kontinu dikatakan sebagai variabel acak eskponensial dengan parameter λ jika fungsi peluang kepadatannya sebagai berikut [4] :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} & ;\ \text{jika } 0 < t < \infty \\ 0 & ;\ \text{t yang lain} \end{cases} \tag{2}$$

Jika t merupakan waktu kerusakan, maka fungsi keandalannya $\left(R(t)\right)$ sebagai berikut:

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \tag{3}$$

2. Distribusi Weibull

Jika diberikan parameter bentuk θ dan parameter lokasi β serta t adalah waktu kerusakan maka fungsi padat peluang$\left(f(t)\right)$ distribusi weibull sebagai berikut :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta} t^{\beta-1} e^{-\frac{t^{\beta}}{\theta}} & ;\ \text{jika } 0 < t < \infty \\ 0 & ;\ \text{t yang lain} \end{cases} \tag{4}$$

Jika t merupakan waktu kerusakan, maka fungsi keandalannya $\left(R(t)\right)$ sebagai berikut:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} \tag{5}$$

3. Distribusi Lognormal

Sebuah variabel acak T berdistribusi lognormal dengan rata-rata μ dan varian σ^2 serta t adalah waktu kerusakan mesin sehingga fungsi padat peluang$\left(f(t)\right)$ distribusi lognormal sebagai berikut :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t)-\mu}{\sigma}\right)^2} & ;\ \text{jika } 0 < t < \infty \\ 0 & ;\ t \text{ yang lain} \end{cases} \tag{6}$$

Fungsi reliabiltas distribusi lognormal untuk t merupakan waktu kerusakan sebagai berikut [5]:

$$R(t) = \phi\left(\frac{\mu - \ln(t)}{\sigma}\right); \tag{7}$$

Dalam penelitian ini digunakan estimasi *Bayes.* Estimasi reliabilitas $\left(R(t)^*\right)$ dengan metode *Bayes* pada distribusi tertentu dengan parameter θ_1 dan θ_2 didefinisikan sebagai [14] :

$$R(t)^* = E(R(t)|T) = \iint R(t)\, \pi(\theta_1, \theta_2\, |T) d\theta_1 d\theta_2 \tag{8}$$

dengan,

$E(R(t)|T)$: Nilai ekspektasi atas T dengan syarat $R(t)$,

$R(t)$: Fungsi reliabilitas distribusi peluang tertentu,

$\pi(\theta_1, \theta_2|T)$: Distribusi posterior parameter $\theta_1$dan θ_2.

C. *Fungsi Reliabilitas Sistem Paralel*

Dua atau lebih komponen dalam sistem dikatakan terkonfiguarasi paralel apabila kerja satu komponen tidak mempengaruhi komponen yang lain. Reliabilitas sistem dengan konfigurasi paralel dirumuskan dengan [4]:

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - R_i(t)\right);\ 0 < i \leq n \tag{9}$$

di mana,

$R_i(t)$: Nilai reliabilitas komponen ke – i

D. *Index of Fit dan Goodness of Fit*

Pada penelitian ini akan digunakan *Least Square Curve* berdasarkan *Linear Regression* pada sumbu Y dengan menggunakan aplikasi *Weibull 6.0* dan mengurutkan nilai r (nilai *Index of Fit*) terbesar sampai terkecil dari keempat distribusi yang diuji. Data waktu kerusakan atau waktu pemeliharaan cocok pada distribusi yang memiliki nilai r tertinggi. Berikut ini merupakan rumus r dan $F(t_i)$ yang digunakan [4]:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} \tag{10}$$

$$F(t_i) = \frac{i-0.3}{n+0.4};\ 0 < i \leq n$$

Setiap distribusi memiliki definisi x_i dan y_i berbeda., Berikut ini merupakan definisi x_i dan $y_i$sesuai distribusi yang diuji, dimana t_i merupakan waktu antar waktu kerusakan ke i dan $0 < i \leq n$ [4].

a. Distribusi Weibull

$$x_i = \ln t_i$$

$$y_i = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(t_i)}\right)\right] \tag{11}$$

b. Distribusi Normal

$$x_i = t_i,$$

$$y_i = \phi^{-1}[F(t_i)] \tag{12}$$

c. Distribusi Lognormal

$$x_i = \ln t_i\ ,$$

$$y_i = \phi^{-1}[F(t_i)]$$

d. Distribusi Eksponensial

$$x_i = t_i$$

$$y_i = \ln\left(\frac{1}{1-F(t_i)}\right) \tag{13}$$

Sedangkan *Goodness of Fit* yang digunakan adalah uji *Mann* untuk mengetahui data kerusakan pada pengamatan sesuai dengan distribusi weibull [4].

H_0 : Data kerusakan terdistribusi weibull

H_1 : Data kerusakan tidak terdistribusi weibull

Statistik uji pada *Mann* sebagai:

$$M = \frac{k_1 \sum_{i=k_1+1}^{r-1}\left[\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}\right]}{k_2 \sum_{i=1}^{k_1}\left[\frac{(\ln t_{i+1} - \ln t_i)}{M_i}\right]} \tag{14}$$

$$M_i = Z_{i+1} - Z_1 \tag{15}$$

$$Z_i = \ln\left[-\ln\left(1 - \frac{i-0,5}{n+0,25}\right)\right] \tag{16}$$

$$k_1 = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\ ;\ k_2 = \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor \tag{17}$$

$$F_{tabel} = F_{\alpha, 2k_1, 2k_2} \tag{18}$$

dengan,

t_i : Waktu kerusakan ke i,

M : Sebuah taksiran,

n : Banyaknya data,

F_{tabel} : Nilai presentase distribusi F,

α : Batas kesalahan maksimal, dalam penelitian ini peneliti menggunakan $\alpha = 0,05$.

Kriteria uji kecocokan weibull adalah jika $M < F_{tabel}$maka H_0 diterima, artinya data kerusakan terdistribusi weibull.

E. Fungsi Likelihood

Fungsi likelihood banyak digunakan dalam menentukan estimasi, termasuk pada proses estimasi dengan metode *Bayes*. Informasi yang dibawa oleh pengamatan t tentang θ semuanya terkandung dalam fungsi $l(\theta|t)$ [6]. Fungsi likelihood sebagai berikut [7]:

$$L(\theta_1, \theta_2|t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} f(t) \,, \qquad (19)$$

dengan,
θ_i : Parameter distribusi tertentu,
t_i : Waktu antar waktu kerusakan ke i,
$f(t)$: Fungsi padat peluang distribusi tertentu.

F. Distribusi Non Informatif Prior

Distribusi Prior Non informatif mengandung makna bahwa tidak adanya informasi distribusi probabilitas yang digunakan sebelumnya. Pendekatan Jeffrey digunakan untuk mendapatkan distribusi prior distribusi prior non informative [7]. Didefinisikan $\delta = (\theta, \varphi)$ di mana θ dan φ merupakan parameter distribusi tertentu. Distribusi non informatif prior untuk parameter θ dengan data berukuran n berdasarkan pada Informasi Fisher $\left(\mathrm{I}(\theta)\right)$ sebagai berikut [8]:

$$\mathrm{I}(\theta) = -nE\left[\frac{\partial^2 \log f(t)}{\partial \theta^2}\right], \qquad (20)$$

$$f(\theta) = \sqrt{\mathrm{I}(\theta)} \,,$$

dengan,
$E\left[\frac{\partial^2 \log f(T|\theta)}{\partial \theta^2}\right]$: Nilai ekspektasi dari $\frac{\partial^2 \log f(T|\theta)}{\partial \theta^2}$,
$f(t)$: PDF distribusi tertentu
θ : Parameter dari distribusi tertentu.

Jika $g(\varphi)$ merupakan fungsi parameter lokasi yang diasumsikan nilai $g(\varphi)$ mendekati c, maka diperoleh distribusi prior $\left(\pi(\theta)\right)$adalah sebagai berikut:

$$\pi(\theta) = f(\theta)g(\varphi),$$

dengan,
$f(\theta)$: Nilai non-informatif prior dari parameter θ,
$g(\varphi)$: Nilai non-informatif prior dari parameter φ

G. Distribusi Posterior

Inferensi berdasarkan distribusi θ bersyarat T di mana $\pi(\theta_1, \theta_2|T)$ merupakan simbol dari distribusi posterior dari parameter $\theta_1$dan θ_2 dapat didefinisikan dengan [6]:

$$\pi(\theta_1, \theta_2|T) = \frac{L(\theta_1,\theta_2|\mathrm{T})\, \pi(\theta)}{\int\int L(\theta_1,\theta_2|\mathrm{T})\, \pi(\theta) d\theta_1 d\theta_2} \,, \qquad (21)$$

H. Markov Chain Monte Carlo

Markov Chain Monte Carlo (MCMC) merupakan metode simulasi untuk membangkitkan peubah – peubah acak menggunakan rantai Markov. Teknik simulasi ini banyak digunakan dalam menyelesaikan permasalahan akibat tidak dapat disimulasi secara langsung. Hal tersebut sering terjadi dalam menyelasaikan masalah pada multiparameter maupun multidimensi khususnya pada inferensi *Bayesian*. Salah satu prinsip penggunaan *Marcov Chain* yaitu dengan *Gibbs Sampler* dengan menggunakan aplikasi *OpenBugs* [9].

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Uji Kecocokan Data Berdasarkan Index of Fit dan Goodness of Fit

Data yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah data waktu antar waktu kerusakan ketiga pompa *submersible* yang disimbolkan dengan t_i di mana $0 < i \leq 82$, artinya jumlah data waktu antar waktu kerusakan ketiga pompa masing - masing sebanyak 82. Analisis kecocokan distribusi dengan data tersebut dilakukan dengan membandingkan nilai *index of fit* (nilai r) distribusi weibull, distribusi normal, distribusi lognormal dan distribusi eksponensial pada pompa I, II dan III.

Tabel 1.
Hasil Penghitungan Nilai $\boldsymbol{r}$ (*Index of fit*)

Pump	Dist. Weibull	Dist. Normal	Dist. Log-normal	Dist. Eksponensia l	Nilai $\boldsymbol{r}$ Terbesar
I	0.9464	0.8516	0.9410	0.888	Distribusi Weibull
II	0.9355	0.8379	0.8965	0.8511	Distribusi Weibull
III	0.9297	0.8347	0.8728	0.8317	Distribusi Weibull

Berdasarkan proses penghitungan diperoleh nilai r *(index of fit)* mengunakan (2.9) yang dapat direpresentasikan pada Tabel 4.1. Nilai r tertinggi pada pompa I, pompa II dan pompa III dimiliki oleh distribusi weibull. Hal ini berarti data t_i pompa I, pompa II dan pompa III terdistribusi weibull. Sehingga, *Goodness of Fit* dilakukan menggunakan uji *Mann*, yang mana $\alpha = 0.05$ dengan hipotersis sebagai berikut:

H_0 : Data t_i pompa I , pompa II dan pompa III terdistribusi weibull
H_1 : Data t_i pompa I, pompa II dan pompa III tidak terdistribusi weibull,

Hasil enghitungan pada Tabel 2.2 menujukkan bahwa $M < F_{tabel}$. Hal ini mengakibatkan H_0 diterima, artinya data t_i pompa I, pompa II dan pompa III terdistribusi weibull. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk mencari estimasi reliabilitas pompa III digunakan model estimasi reliabilitas dengan distribusi weibull 2 parameter menggunakan metode *Bayes.*

Tabel 2.
Hasil Uji Mann untuk Pompa I, Pompa II dan Pompa III

Pompa	k_1	k_2	F_{tabel} $(F_{0.05,82,80})$	M
I	41	40	>1.4	0.779299
II	41	40	>1.4	0.6009
III	41	40	> 1.4	0.6030

B. Model Estimasi Reliabilitas Distribusi Weibull

Model estimasi reliabilitas distribusi weibull didapatkan dengan melakukan transformasi dengan metode transformasi univariate dengan rumus sebagai berikut:

$$f(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right|$$

Jika pada fungsi padat peluang distribusi weibull (1) dimisalkan $y = t^{\beta}$ dan $\frac{1}{\theta} = \varphi$ maka diperoleh :

$$g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{\beta}}$$

$$f\left(g^{-1}(y)\right) = \beta\varphi y^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} e^{-\varphi y}$$

$$f(y) = \left(\varphi e^{-\varphi y}\right) = \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}y}\right) \tag{2}$$

Setelah didapatkan hasil transformasi yaitu persamaan (3.1), terlihat bahwa persamaan tersebut berbentuk fungsi padat peluang distribusi eksponensial. Proses selanjutnya adalah mendapatkan fungsi likelihood $(L(\theta|y_i))$ dari fungsi padat peluang eksponensial (2.1) di mana $0 < i \leq n$ sebagai berikut:

$$L(\theta|y_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}y_i}\right) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i} \tag{3}$$

Distribusi prior dari distribusi eksponensial berdasarkan sehingga diperoleh Informasi Fisher sebagai berikut :

$$\mathrm{I}(\theta) = \frac{2n}{\theta^2} \tag{4}$$

Maka distribsi prior dengan metode Jeffrey diperoleh :

$$\pi(\theta) = \sqrt{\mathrm{I}(\theta)} = \frac{\sqrt{2n}}{\theta}$$

Tahap selanjutnya adalah menentukan distribusi posterior dengan mensubsitusikan fungsi likelihood yang telah diperoleh (3.2) dan distribusi prior (3.3) ke dalam rumus distribusi posetior (2.13) sebagai berikut.

$$\pi(\theta|T) = \frac{\sqrt{2n}\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}\right)\left(\frac{1}{\theta}\right)d\theta}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^n \left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)} \tag{5}$$

Model estimasi reliabilitas diperoleh dengan mensubsitusikan distribusi posterior yang diperoleh dan fungsi reliabilitas distribusi eksponensial (2.2) terhadap rumus model estimasi reliabilitas (2.7) diperoleh :

$$R(t)^* = E(R(t)|T)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y}{\theta}} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^n \left(\frac{1}{\theta^{n+1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\theta}}\right)}{2\Gamma(n)} d\theta$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)+y\right)^n} \tag{6}$$

Karena $y = {t_i}^{\beta}$

Maka diperoleh Model estimasi Reliabilitasnya sebgai berikut:

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} {t_i}^{\beta}\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} {t_i}^{\beta}\right)+t^{\beta}\right)^n} \tag{7}$$

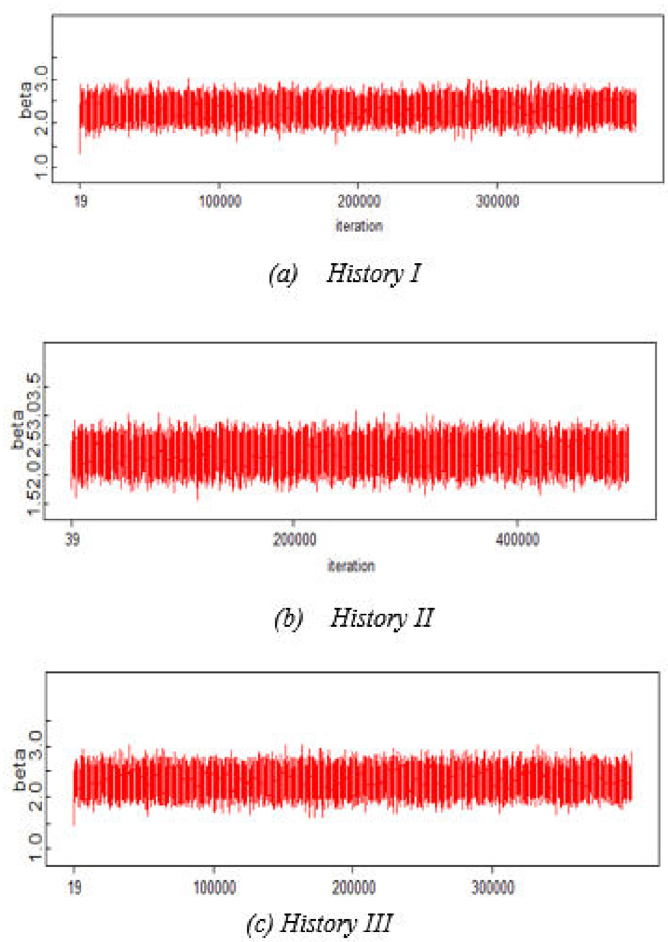
Berdasarkan model estimasi reliabilitas yang telah diperoleh, model tersebut masih mengandung parameter β yang belum diketahui estimasi nilainya. Estimasi parameter β ditentukan dengan metode MCMC menggunakan *software OpenBugs* karena distribusi posterior yang diperoleh *infisible*.

Hal pertama yang dilakukan dalam mengestimasi nilai parameter β menggunakan *OpenBugs* adalah dengan membentuk algoritma, di mana diasumsikan distribusi prior dari $\theta \sim Expenensial$ (0.01) dan $\beta \sim Gamma$ (0.1,0.001) dengan menginput data t_i pompa I, pompa II dan pompa III. Nilai distribusi posterior dibangkitkan dengan metode MCMC sebanyak 100.000 sehingga diperoleh hasil secara statistik seperti pada Tabel 4.6.

Tabel 3
Hasil Uji Statistik Parameter $\boldsymbol{\beta}$ Menggunakan *OpenBugs*

Pompa	Mean	Standar Deviasi	5% dari SD	MC Error
I	2.325	0.1687	0.0084	0.0022
II	2.349	0.1699	0.0085	0.0020
III	2.321	0.1697	0.0084	0.0023

Berdasarkan definisinya, estimasi parameter dengan metode *Bayes* merupakan nilai ekspektasi dari posterior, artinya nilai parameter mendekati nilai rata - rata distribusi posteriornya [10]. Langkah selanjutnya adalah memastikan apakah nilai bangkitan posterior yang telah didapatkan bersifat konvergen. Berdasarkan Tabel 4.6 dapat diketahui bahwa nilai 0.05 dari standar deviasi distribusi posterior lebih besar disbanding *Markov Chain* Error maka dapat disimpulkan data bangkitan tersebut konvergen [9].



Gambar 1 Trace Plot Pompa I, Pompa II dan Pompa III

Selain itu kekonvergenan sebuah data dapat diuji dengan mengamati *trace plot* yang terdapat Gambar 3.1 Berdasrkan ketiga *trace plot* tersebut dapat disimpulkan bahwa data tersebut konvergen karena tidak ada trend atau kecenderungan dalam trace plot. Oleh karena itu, berdasarkan Tabel 3.3dapat diketahui bahwa parameter β untuk pompa I adalah , untuk pompa II adalah dan untuk pompa III adalah. Sehingga model reliabilitas masing – masing pompa sebagai berikut :

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right) + t^{\beta}\right)^n} \tag{8}$$

di mana , $\beta = 2.325$ untuk pompa I

$\beta = 2.349$ untuk pompa II

$\beta = 2.321$ untuk pompa III

C. Model Estimasi Relibilitas Distribusi Lognormal

Selain distribusi weibull, distribusi lognormal banyak digunakan dalam menentukan nilai reliabilitas. Oleh karena itu dalam penelitian ini dibahas bagaimana mendapatkan model reliabilitas menggunakan distribusi lognormal dengan metode *Bayes*.

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan Evi (2016) diperoleh estimasi parameter μ distribusi lognormal sebagai berikut [12]:

$$\mu *= \frac{e^{-\frac{\beta}{2\sigma^2}}}{2\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)(\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \tag{9}$$

Dan distribusi posterior marginal parameter σ^2 :

$$\pi(\sigma^2|t_i) = \frac{e^{-\frac{\beta}{2\sigma^2}}}{2\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)(\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \tag{10}$$

Berdasarkan persamaan (3.6) diperolehestimasi parameter σ^2 sebagai berikut :

$$\sigma^2 *= E(\sigma^2|t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2\, \pi(\sigma^2|t_i)\, d\sigma^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \frac{e^{-\frac{\beta}{2\sigma^2}}}{2\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)(\sigma^2)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}\, d\sigma^2$$

$$= \frac{\beta}{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\left(\frac{n-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i)^2}{n^2-3n} \tag{11}$$

Selanjutnya, model estimasi reliabilitas didapatkan dengan mensubsitusikan estimasi parameter (3.5) dan (3.7) ke dalam persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$R(t) = \phi\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln t_i}{n} - \ln(t)}{\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i)^2}{n^2-3n}}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{(n-3)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln t_i - \mathrm{n}\ln(t)\right)}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\ln t_i)^2}\right) \tag{12}$$

D. Hasil Estimasi Reliabilitas Pompa Submersible PDAM Kota Malang

Langkah selanjutnya adalah menganalisis reliabilitas pompa I, pompa II dan Pompa III pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang dengan model estimasi reliabilitas yang telah diperoleh (3.4). Pada penelitian ini didapatkan estimasi reliabilitas pompa pada tanggal 15 Maret 2017. Berikut ini merupakan nilai estimasi reliabilitas pompa I yang memiliki total data t_i sebanyak 82 :

$$t = 15\,Maret\ - 31\,Januari\ \ (waktu\ kerusakan\ t_n)$$

$$= 43$$

di mana ,

$\beta = 2.321$ untuk pompa I

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{(2.345)}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{(2.321)}\right) + t^{(2.321)}\right)^{82}}$$

$$= \left(\frac{5550006.8713}{5550006.8713 + 6184.1538}\right)^{82}$$

$$= 0.4030 \tag{13}$$

Berikut ini merupakan nilai estimasi reliabilitas pompa II yang memiliki total data t_i sebanyak 82 :

$$t = 15\,Maret\ - 14\,Februari\ (waktu\ kerusakan\ t_n)$$

$$= 29$$

di mana , $\beta = 2.345$ untuk pompa II

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{(2.345)}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{(2.345)}\right) + t^{(2.345)}\right)^{82}}$$

$$= \left(\frac{613178.5}{613178.5 + 2723.785}\right)^{82}$$

$$= 0.6952 \tag{14}$$

Berikut ini merupakan nilai estimasi reliabilitas pompa III yang memiliki total data t_i sebanyak 82 :

$$t = 15\,Maret\ - 18\,Februari(waktu\ kerusakan\ t_n)$$

$$= 25$$

di mana , $\beta = 2.32$ untuk pompa III

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{(2.345)}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{(2.345)}\right) + t^{(2.345)}\right)^{82}}$$

$$= \left(\frac{551014.2}{551014.2 + 1756.381}\right)^{82}$$

$$= 0.7701 = 3 \tag{15}$$

Selanjutnya, adalah menentukan reliabilitas dari sistem perpompaan rumah pompa Wendit I dengan menggunakan rumus(2.8) berikut :

$$R_s(t) = 1 - \left[\left(1 - R_1(t)\right)\left(1 - R_2(t)\right)\left(1 - R_3(t)\right)\right]$$

$$= 1 - [(1 - 0.4030)(1 - 0.6952)(1 - 0.7703)]$$

$$= 1 - 0.0417$$

$$= 0.9583 \tag{16}$$

Maka dapat diketahui bahwa nilai reliabilitas sistem perpompaan rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang adalah 0.9581.

IV. KESIMPULAN

Berdasarakan hasil analisis dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa model estimasi reliablitas distribusi weibull dengan metode *Bayes* secara umum adalah

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right)^n}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta}\right) + t^{\beta}\right)^n} \tag{1}$$

di mana nilai estimasi β tergantung pada kasus yang akan ditangani. Sedangkan, model estimasi reliabilitas untuk distribusi lognormal dengan metode *Bayes* secara umum adalah

$$R(t)^* = \phi\left(\frac{(n-3)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \mathrm{n} \ln(t)\right)}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} (\ln t_i)^2}\right) \tag{2}$$

Model estimasi reliabilitas yang telah diperoleh diterapkan pada studi kasus dalam mendapatkan nilai reliabilitas ketiga pompa *submersible* pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang. Berdasarkan uji kecocokan data ketiga pompa tersebut terdistribusi weibull, maka model estimasi reliabilitas yang digunakan adalah

$$R(t)^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{\beta}\right)^{82}}{\left(\left(\sum_{i=1}^{82} t_i{}^{\beta}\right) + t^{\beta}\right)^{82}} \tag{3}$$

di mana , $\beta = 2.325$ untuk pompa I

$\beta = 2.349$ untuk pompa II

$\beta = 2.321$ untuk pompa III

Hasil perhutngan yang diperoleh berupa nilai relibilitas pada tanggal 15 Maret 2017 untuk pompa I adalah 0.4030, nilai reliabilitas pompa II adalah 0.6952 dan nilai relibilitas pompa III adalah 0.7703. Sedangkan nilai relibilitas system perpompaan pada rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang adalah 0.9583. Karena nilai reliabilitas system perpompaan mendekati 1 maka dapat dikatakan sistemperpompaan rumah pompa Wendit I PDAM Kota Malang sangat baik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] R. K. Mobley, L. R. Hinggins, and D. J. Wikoff, *Maintanance Engineering Handbook*. New York: Mc Graw Hill, 2008.

[2] C. Sheut and Krajewski, “A Decision Model For Corrective Maintenance Management. Kansas State university,” USA, 1993.

[3] C. P. Robert, *The Bayes Choice*. New York: Springer-Verlag New York Inc, 1994.

[4] C. E. Ebeling, *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*. Singapore: Mc Graw Hill, 1996.

[5] M. Rausand and A. Hoyland, *System Reliability Theory*, 2nd ed. USA: John Wiley & Sons, 2004.

[6] S. . Sinha and B. K. Kale, *Life Testing and Reliability Estimation*. New Delhi: Wile Eastern Limited, 1980.

[7] R. E. Walpole and R. H. Myer, *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*. Bandung: ITB, 1995.

[8] R. V. Hogg and A. T. Craig, *Introduction of Mathematical Statistics*, 6th ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2005.

[9] I. Ntzoufras, *Bayesian Modeling Using WinBugs*. Canada: John Wiley & Sons Inc, 2009.

[10] B. Puza, “Bayesian Method for Statistical Analysis,” Australia, 2015.