

Magnetohidrodinamik Tak Tunak Pada Konveksi Campuran Yang Mengalir Melalui Bola Teriris Dalam Fluida Kental Di Bawah Pengaruh Medan Magnet

Mochamad Satria Dharma Utama, Basuki Widodo, dan Dieky Adzkiya

Departemen Matematika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

e-mail: b_widodo@matematika.its.ac.id, dieky@matematika.its.ac.id

Abstrak—Magnetohidrodinamik (MHD) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik akibat medan magnet. Pada penelitian ini diamati permasalahan tentang aliran fluida kental yang mengalir bola teriris bermagnet dengan alirannya dipengaruhi konveksi campuran dengan berfokus pada kondisi tak tunak. Aliran fluida kental yang melewati bola teriris akan membentuk lapisan batas. Berdasarkan fenomena pada lapisan batas tersebut dibentuk Persamaan Pembangun dari model matematika, Persamaan Pembangun berdimensi ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensional selanjutnya ditransformasikan ke dalam bentuk Persamaan Similitas. Kemudian, Persamaan Similitas tersebut diselesaikan secara numerik dengan metode Keller-Box. Setelah itu, dikaji tentang perbandingan parameter yang digunakan yaitu parameter magnetik, parameter konveksi, dan besar sudut irisan bola terhadap kurva kecepatan dan temperatur dengan cara mengembangkan model matematika dari permasalahan di atas dan menyelesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-Box. Hasil dari penelitian ini, model matematika yang didapatkan melalui persamaan-persamaan sebelumnya, jika semakin besar parameter magnetik, parameter konveksi dan sudut irisan, maka semakin meningkat pula kecepatan aliran fluida. Sehingga variasi parameter tersebut berbanding lurus dengan kecepatan fluida. Selain itu, jika semakin besar parameter magnetik, parameter konveksi dan sudut irisan, maka semakin berkurang pula temperatur fluida. Sehingga parameter tersebut berbanding terbalik dengan temperatur fluida. Namun pada simulasi parameter Bilangan Prandtl berlaku sebaliknya. Bilangan Prandtl berbanding lurus dengan temperatur fluida dan berbanding terbalik terhadap kecepatan fluida. Hasil dari setiap simulasi menunjukkan bahwa setiap kurva dari setiap simulasi parameter akan berubah secara signifikan pada setiap perubahan jarak titik penelitan atau jarak lapisan batas.

Kata Kunci—Bola pejal teriris, Fluida Kental, Konveksi Campuran, Magnetohidrodinamik, Metode Keller-Box.

I. PENDAHULUAN

ALIRAN magnetohidrodinamik atau Magnetohydrodynamic Flow (MHD) adalah salah satu aliran khusus yang cukup sering diteliti beberapa tahun ini. Aliran Magnetohidrodinamik mempelajari aliran fluida yang dapat menghantarkan aliran listrik dan dipengaruhi oleh medan magnet [1]. Pada bidang teknologi, pemanfaatan magnetohidrodinamik cukup luas. Salah satunya adalah pada PLTU [2]. Medan magnet juga dapat digunakan untuk

mengendalikan operasi aliran seperti di mana cairan keluar mengandung listrik dan terionisasi [3].

Dalam hal ini aliran fluida kental dipengaruhi oleh medan magnet dan aliran konveksi. Medan magnet disekitar fluida akan merubah kecepatan fluida. Konveksi merubah temperatur aliran fluida kental yang melewati permukaan bola teriris karena adanya gaya luar yang mempengaruhi perpindahan panas. Permukaan irisan bola mempengaruhi kecepatan dan suhu aliran fluida. Variasi sudut irisan bola juga mempengaruhi kecepatan fluida. Penelitian sebelumnya mengenai magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan konveksi paksa yang mengalir melewati bola teriris diteliti menggunakan berbagai parameter [4].

Dalam penelitian ini, digunakan beberapa tinjauan pustaka mengenai magnetohidrodinamik mulai dari jenis konveksi, jenis fluida, dan lainnya [5], selain itu konveksi bebas juga pernah diteliti [6]. Hasil simulasi numerik aliran magnetohidrodinamik tak tunak pada konveksi paksa menggunakan metode Keller-Box menunjukkan bahwa ketika parameter magnetik bertambah maka distribusi temperatur fluida berkurang dan ketika parameter magnetik berkurang maka distribusi kecepatan fluida juga berkurang [7]. Selain itu, kecepatan akan semakin bertambah seiring bertambahnya medan magnet [8]. Dan juga bertambahnya parameter magnetik maka profil kecepatan semakin bertambah pada fluida micropolar [9].

Dalam penelitian ini akan diselidiki pengaruh adanya parameter magnetik, parameter konveksi, dan besar sudut irisan bola terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluid. Penelitian ini juga akan dikaji secara teoritik dan numerik pengaruh medan magnet dan perpindahan panas dengan konveksi paksa pada fluida pekat, apabila melewati sebuah benda yang berbentuk bola teriris dibawah pengaruh konveksi campuran. Bola yang diiris adalah bola pejal dengan permukaan halus (tidak berpori).

II. METODOLOGI PENELITIAN

Tahapan penelitian yang dijabarkan disini akan memperjelas apa saja yang dilakukan dalam menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini. Secara detail, desain dan metode penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Mengkaji model matematika aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris.
2. Mengkaji model matematika aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet.
3. Mengembangkan model aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet menggunakan *continuum principle* dan hukum-hukum fisika.
4. Mengembangkan metode beda hingga implisit dengan metode Keller-Box untuk penyelesaian model matematika dari aliran fluida dan perpindahan panas tak tunak pada lapisan batas magnetohidrodinamik aliran fluida kental yang melalui bola teriris dibawah pengaruh medan magnet.
5. Membuat algoritma program. Pada tahapan ini, akan dibuat algoritma program dari penyelesaian metode beda hingga implisit dengan skema Keller-Box
6. Membuat program simulasi hasil.

III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan pada fluida yang bersifat unsteady dan incompressible adalah sebagai berikut Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial(\bar{r}\bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{r}\bar{v})}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{1}$$

Persamaan Energi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \tag{2}$$

Persamaan momentum

$$\int \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{t}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \right) d\mathcal{V} = \int (-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}) d\mathcal{V} + \int -\sigma \frac{25}{16} B_0^2 \mathbf{u} d\mathcal{V} + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} \tag{3}$$

dengan $\bar{r}(\bar{x}) = \bar{b} \sin \frac{\bar{x}}{\bar{b}}$

Dimana variabel yang menggunakan tanda $\bar{}$ menunjukkan bahwa variabel tersebut merupakan variabel berdimensi.

B. Persamaan Momentum

Pada kasus ini sumbu-z diabaikan. Sehingga persamaan momentum yang ada dapat dibangun cukup pada sumbu-x dan sumbu-y. Pada Persamaan momentum (3) terdapat komponen vektor, yang apabila dijabarkan dan dengan mengelompokkan vektor \hat{i} untuk sumbu x dan vektor \hat{j} untuk sumbu y didapatkan persamaan momentum pada sumbu x

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{u} + (\rho - \rho_\infty) g_x \tag{4}$$

Dan untuk persamaan momentum pada sumbu y

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{v} + (\rho - \rho_\infty) g_y \tag{5}$$

Pendekatan Boussinesq digunakan untuk mendekati perbedaan kerapatan yang menyebabkan adanya aliran akibat

dari interaksi antara gaya gravitasi dan tekanan hidrostatik seperti pengaruh temperatur. Berdasarkan pendekatan Deret Taylor, yaitu

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) + O(\bar{T} - T_\infty)^2$$

Diasumsikan bahwa nilai $(\bar{T} - T_\infty)$ kecil sehingga bagian yang berorder tinggi dapat dihilangkan, maka persamaannya dapat diubah menjadi

$$\rho - \rho_\infty = -\rho\beta(\bar{T} - T_\infty) \tag{6}$$

Dengan β adalah koefisien ekspansi panas yang dapat dinyatakan dengan

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (6) pada persamaan momentum sumbu-x dan sumbu-y yang ditunjukkan pada persamaan (4) dan (5), persamaan momentumnya menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{u} + \rho\beta(\bar{T} - T_\infty) g_x \tag{7}$$

pada sumbu-x dan pada sumbu-y dapat dituliskan menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{25}{16} \sigma B_0^2 \bar{v} + \rho\beta(\bar{T} - T_\infty) g_y \tag{8}$$

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas yaitu

$$\bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y}$$

$$\bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w \text{ untuk setiap } \bar{y} = 0$$

$$\bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_\infty \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty$$

Dengan kecepatan aliran bebas $\bar{u}_e = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\bar{x}}{\bar{b}} \right)$

C. Transformasi Variabel Tak Berdimensi

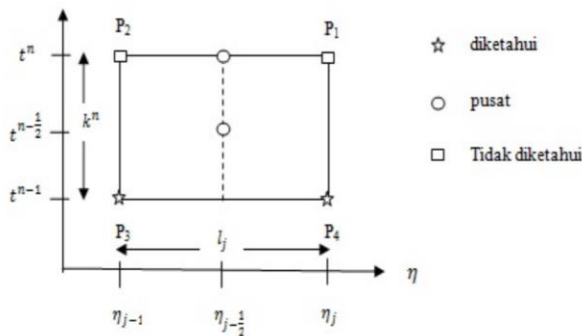
Variabel tak berdimensi digunakan untuk mempermudah proses komputasi. Pada permasalahan ini variabel tak berdimensi yang digunakan adalah sebagai berikut [6]

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{a}, & y &= Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}, & r &= \frac{\bar{r}}{a}, & b &= \frac{\bar{b}}{a} \\ u &= \frac{\bar{u}}{U_\infty}, & v &= Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty} \\ t &= \frac{U_\infty \bar{t}}{a} \\ p &= \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2}, & T &= \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty} \end{aligned} \tag{9}$$

Dengan $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$ dan ν adalah viskositas kinematik yang dapat dituliskan sebagai $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Ditambahkan pula parameter-parameter yang didefinisikan sebagai berikut:

Parameter Magnetik(M)	$M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$
Parameter Konveksi (α)	$\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$
Bilangan Grashof (Gr)	$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu}$
Bilangan Prandtl (Pr)	$Pr = \frac{\nu \rho C_p}{c}$

(10)



Gambar 1. Gambar Stensil Beda Hingga.

Selanjutnya dilakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi (9) dan parameter (10) pada Persamaan (1), (2), (7) dan (8) sehingga didapatkan Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0$$

Persamaan Momentum sumbu-x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{25}{16} Mu + \alpha T \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)$$

Persamaan Momentum sumbu-y

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{25}{16} \frac{M}{Re} v + \frac{\alpha T}{Re^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)}$$

Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

D. Pendekatan Lapisan Batas

Digunakan pendekatan lapisan batas dengan $Re \rightarrow \infty$ sehingga $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$, maka diperoleh

Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

Persamaan Momentum sumbu-x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu + \alpha T \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \tag{12}$$

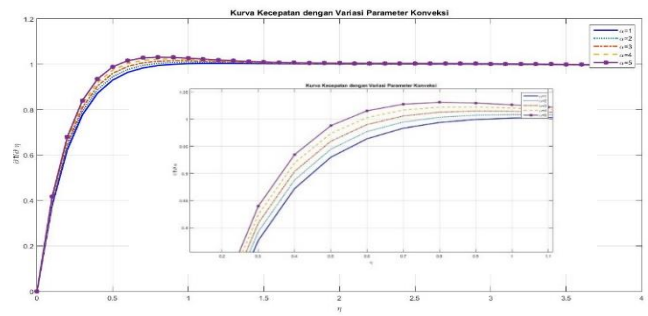
Persamaan Momentum sumbu-y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

Persamaan Energi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{14}$$

Pada Persamaan (13) ditunjukkan bahwa Persamaan momentum tidak terpengaruh oleh variabel y . Sehingga tekanan alirannya hanya bergantung pada sumbu-x. Maka persamaan momentum diluar lapisan batas menjadi



Gambar 2. Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi(α), Pr=0.7, θ_s = 45° dan M = 10.

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - \frac{25}{16} Mu_e + \alpha T \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) = 0 \tag{15}$$

dengan menggunakan kecepatan aliran bebas $u_e = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)$ sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \tag{16}$$

Selanjutnya disubstitusikan Persamaan (16) pada Persamaan (15) diperoleh

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{25}{16} Mu_e + \alpha T \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \tag{17}$$

dan pada saat $T = 0$ diperoleh persamaan

$$- \frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{25}{16} Mu_e \tag{18}$$

Kemudian kondisi $T = 0$ Persamaan (18) pada Persamaan (12)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{25}{16} M(u - u_e) + \alpha T \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) \tag{19}$$

E. Fungsi Alir

Fungsi alir ini dinyatakan sebagai berikut:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan fungsi alir pada persamaan (11), (19) dan (14), maka didapat persamaan sebagai berikut:

Persamaan Kontinuitas

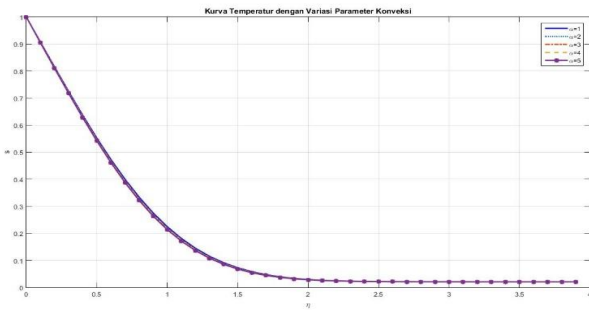
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \tag{20}$$

Persamaan Momentum

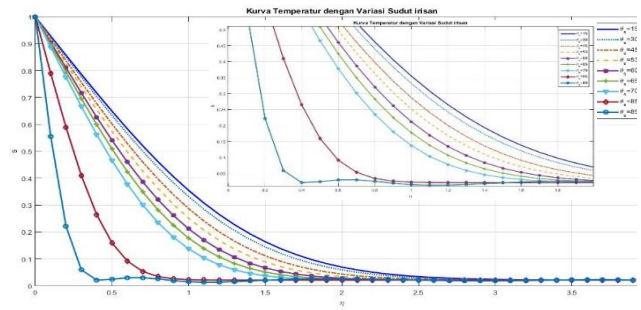
$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{25}{16} M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right)$$

Persamaan Energi

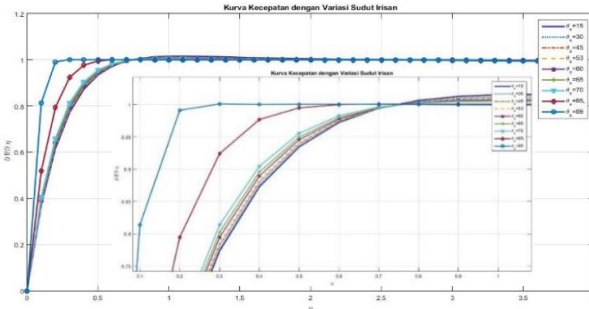
$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



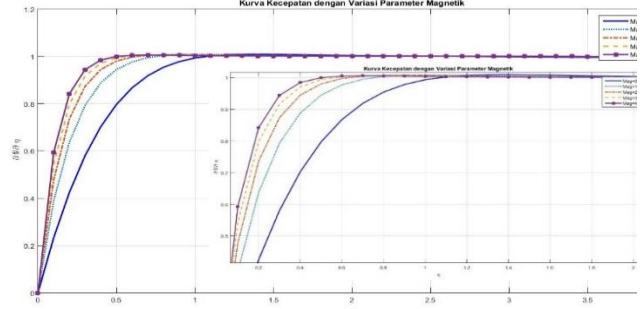
Gambar 3. Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi(α), $Pr=0.7, \theta_s = 45^\circ$ dan $M = 10$.



Gambar 5. Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Sudut Irisan (θ_s), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $M = 10$.



Gambar 4. Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Sudut Irisan (θ_s), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $M = 10$.



Gambar 6. Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik (M), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $\theta_s = 45^\circ$.

F. Persamaan Similaritas

Persamaan kontinuitas pada Persamaan (20) dapat dihilangkan dari hasil fungsi alir sehingga Persamaan pembangun hanya ada 2 yaitu persamaan momentum dan persamaan energi. Variabel similaritas untuk *small time* ($t \leq t^*$) dengan t^* sebarang nilai yaitu

$$\psi = t^{\frac{1}{2}} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) \quad T = s(x, \eta, t) \quad \eta = \frac{y}{t^{\frac{1}{2}}}$$

Sedangkan untuk *large time* ($t > t^*$) dengan t^* sebarang nilai yaitu

$$\psi = u_e(x) r(x) F(x, Y, t) \quad T = S(x, Y, t) \quad Y = y$$

dan pada penelitian ini sudut pengamatannya yaitu $x \approx 0$ atau titik stagnasi sehingga nilai

$$\begin{aligned} u_e(x) &= 0 \\ \frac{\partial u_e}{\partial x} &= \frac{3}{2 \cos \theta_s} \\ \tan \left(\frac{x \cos x}{\cos \theta_s} \right) &= \frac{2}{3} \\ u_e &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

kemudian dimisalkan $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$ dan $\frac{\partial s}{\partial \eta} = s'$ untuk *small time* dan

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = F' \text{ dan } \frac{\partial S}{\partial Y} = S' \text{ untuk } \textit{large time}$$

Sehingga Persamaan untuk *small time* menjadi

$$\begin{aligned} f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t \frac{\partial u_e}{\partial x} [1 - (f')^2 + ff''] &= \\ t \frac{\partial f'}{\partial t} - \frac{25}{16} M t (1 - f') - \frac{3}{2} a t s & \end{aligned}$$

$$s'' + \frac{Pr \eta}{2} s' + \frac{3Pr t}{2 \cos \theta_s} f s' = Pr t \frac{\partial s}{\partial t}$$

Dan untuk *large time* menjadi

$$\begin{aligned} F''' + \frac{3}{2 \cos \theta_s} [1 - (F')^2 + FF''] &= \\ \frac{\partial F'}{\partial t} - \frac{25}{16} M (1 - F') + \frac{2}{3} \alpha S & \\ S'' + \frac{3Pr}{2 \cos \theta_s} F S' = Pr S' & \end{aligned}$$

G. Langkah-langkah Keller-Box

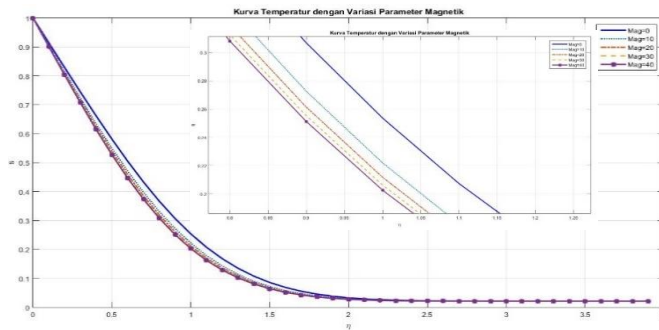
1. Dilakukan proses merubah persamaan-persamaan orde tinggi menjadi persamaan-persamaan orde pertama dan melakukan permisalan fungsi sebagai berikut :

<i>Small Time</i>	<i>Large Time</i>
$f' = u$	$F' = U$
$f'' = v$	$F'' = V$
$s' = q$	$S' = Q$

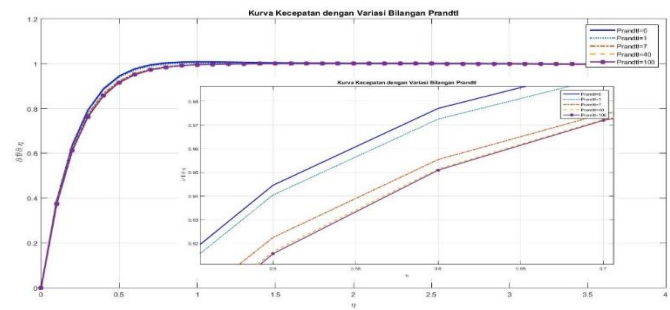
2. Dilakukan proses diskritisasi pada model matematika yang diperoleh pada waktu kecil (*Small Time*) dan pada waktu besar (*Large Time*) menggunakan titik pusat atau titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ pada ruas $P_1 P_2$ dengan beda

hingga pusat. Sedangkan untuk persamaan-persamaan yang tak linier digunakan titik pusat atau titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$ pada segi empat $P_1 P_2 P_3 P_4$. Untuk lebih memahami pernyataan di atas lihat (Gambar 1):

3. Pada langkah ketiga dilakukan proses pelinieran persamaan-persamaan yang diperoleh dengan menggunakan metode Newton yang kemudian disajikan dalam bentuk matriks vektor. Sebelum melakukan proses pelinieran, diperkenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut :



Gambar 7. Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik (M), $Pr=0.7, \alpha = 2$ dan $\theta_s = 45^\circ$.



Gambar 8. Kurva Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr), dengan $\theta_s = 45^\circ, \alpha = 2$ dan $M = 10$.

<p><i>Small Time</i></p> $f_j^{(i+1)} = f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)}$ $u_j^{(i+1)} = u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)}$ $v_j^{(i+1)} = v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)}$ $s_j^{(i+1)} = s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)}$ $q_j^{(i+1)} = q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)}$	<p><i>Large Time</i></p> $F_j^{(i+1)} = F_j^{(i)} + \delta F_j^{(i)}$ $U_j^{(i+1)} = U_j^{(i)} + \delta U_j^{(i)}$ $V_j^{(i+1)} = V_j^{(i)} + \delta V_j^{(i)}$ $S_j^{(i+1)} = S_j^{(i)} + \delta S_j^{(i)}$ $Q_j^{(i+1)} = Q_j^{(i)} + \delta Q_j^{(i)}$
---	---

4. Pada langkah keempat, hasil dari proses pelinieran diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal. Persamaan-persamaan dari hasil linierisasi di atas dapat diselesaikan dengan teknik eliminasi blok tridiagonal yang berupa matriks blok. Hal ini yang merupakan ciri dari penyelesaian dengan metode Keller-Box, karena pada penyelesaian dengan matriks tridiagonal, pada umumnya elemen-elemennya berisi konstanta-konstanta. Hasil dari proses linierisasi tersebut dapat dibentuk matriks blok tridiagonal dengan cara dinyatakan dalam keadaan yaitu saat $j = 1, j = N - 1$, dan $j = N$

H. Hasil Simulasi Numerik

Dilakukan simulasi dengan memberikan inputan beberapa variasi yaitu variasi magnetik (M), variasi irisan (θ), variasi konveksi (α), dan variasi bilangan Prandtl pada titik stagnasi terendah yakni $x = 0^\circ$. Dilakukan simulasi numerik bertujuan untuk mengetahui bagaimana profil kecepatan dan profil temperatur dari pengaruh variasi berbagai kondisi.

1) Pengaruh Variasi Parameter Konveksi

Variasi parameter konveksi yang digunakan pada simulasi ini yaitu $\alpha = 1,2,3,4,5$, nilai parameter lain yang digunakan adalah $M = 10, Pr = 0,7, \theta_s = 30^\circ$, banyak partisi $\eta = 40$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$. Hasil simulasinya dapat dilihat pada (Gambar 2).

Berdasarkan Gambar 2, mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$ kurva mengalami peningkatan. Dengan digunakannya variasi parameter konveksi, kecepatan mengalami peningkatan lebih signifikan sebanding dengan parameter variasi yang digunakan. Hal ini diakibatkan karena meningkatnya parameter konveksi akan meningkatkan gaya apung fluida. Gaya apung fluida akan mempengaruhi momentum fluida yang juga akan meningkatkan kecepatan fluida.

Berdasarkan Gambar 3, mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$ kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter konveksi, temperatur mengalami penurunan lebih

cepat dengan digunakan variasi parameter konveksi lebih tinggi. Secara matematis hal ini terjadi akibat $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$. Pada $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$ ditunjukkan bahwa ($\alpha \sim Gr$). Bilangan Grashof sendiri dapat dinyatakan dengan $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2}$, yang berarti bahwa $\alpha \sim Gr \sim (T_w - T_\infty)$. Penurunan temperatur terjadi karena ($T_w - T_\infty$) semakin besar. Dengan T_w nilainya tetap, maka temperatur fluida semakin kecil.

2) Pengaruh Variasi Parameter Sudut Irisan θ_s

Variasi parameter sudut irisan yang digunakan pada simulasi ini yaitu $\theta_s = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 53^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 85^\circ, 89^\circ$, nilai parameter lain yang digunakan adalah $M = 10, Pr = 0,7, \alpha = 2$, banyak partisi $\eta = 40$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$. Hasil simulasinya dapat dilihat pada (Gambar 4).

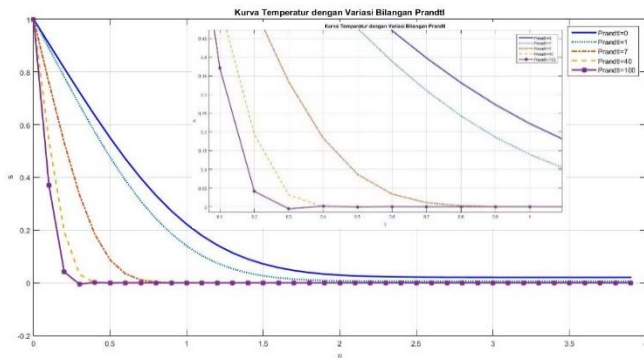
Berdasarkan Gambar 4, mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$ kurva mengalami peningkatan. Dengan digunakannya variasi parameter θ_s , kecepatan mengalami peningkatan lebih signifikan sebanding dengan parameter variasi yang digunakan. Hal ini akan sesuaikan jika dianalisa bahwa $\frac{3t}{2 \cos \theta_s}$ pada persamaan momentum meningkat maka $\cos \theta_s$ semakin kecil, maka akan mengakibatkan nilai $\frac{3t}{2 \cos \theta_s}$ semakin besar, sehingga momentumnya akan bertambah yang juga menyebabkan kecepatan fluida semakin meningkat.

Berdasarkan Gambar 5, mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$ kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter konveksi, temperatur mengalami penurunan lebih cepat dengan digunakan variasi parameter θ_s lebih besar. Hal ini terjadi Karena semakin besar sudut irisan bola maka permukaan depan semakin luas yang mengakibatkan distribusi panas ke bola semakin cepat dibandingkan dengan distribusi panas fluidanya sehingga temperatur semakin menurun.

3) Pengaruh Variasi Parameter Magnetik (M)

Variasi parameter magnetik yang digunakan pada simulasi ini yaitu $M = 0,10,20,30,40$, nilai parameter lain yang digunakan adalah $\alpha = 2, Pr = 0,7, \theta_s = 30^\circ$, banyak partisi $\eta = 40$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$. Hasil simulasinya dapat dilihat pada (Gambar 6).

Berdasarkan Gambar 6, mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$ kurva mengalami peningkatan. Dengan digunakannya variasi parameter θ_s , kecepatan mengalami peningkatan lebih signifikan sebanding dengan parameter variasi yang digunakan.



Gambar 9. Kurva Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr), dengan $\theta_s = 45^\circ, \alpha = 2$ dan $M = 10$.

Secara matematis $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$ yang berarti dengan bertambahnya medan magnet maka densitas akan berkurang sehingga hambatan akibat gaya antar partikel akan berkurang membuat kecepatan semakin bertambah.

Berdasarkan Gambar 7, mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$ kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter magnetik. Hal ini terjadi karena energi internal fluida semakin bertambah karena pengaruh medan magnet dan densitas yang berkurang sebagai akibat bertambahnya parameter magnetik. Dengan bertambahnya energi internal maka energi yang digunakan fluida untuk bergerak berkurang, demikian juga dengan densitas yang berkurang artinya kerapatan molekul fluida berkurang sehingga distribusi panas antar fluida berkurang. Ini berakibat temperatur mengalami penurunan seiring bertambahnya parameter magnetik.

4) Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl (Pr)

Variasi bilangan Prandtl yang digunakan pada simulasi ini yaitu $Pr = 0,1,7,40,100$, nilai parameter lain yang digunakan adalah $\alpha = 2, M = 10, \theta_s = 30^\circ$, banyak partisi $\eta = 40$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$. Hasil simulasinya dapat dilihat pada (Gambar 8).

Berdasarkan Gambar 8, mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$ kurva mengalami peningkatan. Dengan digunakannya variasi Bilangan Prandtl temperatur mengalami penurunan lebih cepat pada Bilangan Prandtl yang semakin besar. Hal ini terjadi karena secara matematis $Pr = \frac{v\rho c_p}{c}$ yang berarti bahwa bilangan Prandtl sebanding dengan densitas fluida ($Pr \sim \rho$). Jadi jika bilangan Prandtl bertambah maka densitas fluida semakin meningkat. Sehingga hal inilah yang mengakibatkan kecepatan fluida mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya bilangan Prandtl.

Berdasarkan Gambar 9, mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$ kurva mengalami penurunan. Dengan digunakannya variasi parameter magnetik, temperatur mengalami penurunan lebih cepat sebanding dengan bilangan Prandtl yang semakin besar. Jika diamati dengan variasi bilangan Prandtl, kurva temperatur semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl. Hal ini terjadi karena $Pr = \frac{v\rho c_p}{c}$ yang artinya bilangan Prandtl merupakan perbandingan viskositas kinematika dengan

difusivitas termal. Viskositas kinematika berkaitan dengan kecepatan perpindahan antara molekul, sedangkan difusivitas termal berkaitan dengan perbandingan penerusan panas dengan kapasitas penyimpanan energi molekul. Semakin besar bilangan Prandtl mengakibatkan difusivitas termal semakin kecil karena bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan difusivitas termal. Ini berarti bahwa dengan bertambahnya bilangan Prandtl maka distribusi panas antar fluida berkurang atau dapat dikatakan perpindahan panas ke permukaan benda lebih cepat dari pada fluidanya sehingga mengakibatkan temperatur fluida semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl.

IV. KESIMPULAN

Dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, sehingga dapat disimpulkan sebagai berikut:

Berdasarkan analisis, pembahasan, serta simulasi numerik dari magnetohidrodinamik yang tak tunak pada lapisan batas yang mengalir melalui bola teriris di dalam fluida kental di bawah pengaruh medan magnet, maka dapat disimpulkan bahwa parameter magnetik (M), parameter konveksi (α), besar sudut irisan bola (θ_s), dan bilangan Prandtl berbanding lurus dengan kecepatan fluida. Sedangkan, parameter magnetik (M), parameter konveksi (α), besar sudut irisan bola (θ_s) berbanding terbalik dengan temperatur fluida, dan bilangan Prandtl berbanding lurus dengan temperatur fluida.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] B. Widodo, D. A. Khalimah, F. D. S. Zainal, and C. Imron, "Numerical Solution of Heat Transfer Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past a Sphere," *Int. J. Far East J. Math. Sci. Publ. House-India*, 2015.
- [2] S. Irianto, "Kombinasi Operasi PLTU - MHD - Fuel Cell Dan Kemungkinan Penerapannya Di Indonesia," Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2013.
- [3] P. A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [4] I. G. E. P. Wijaya, "Magnetohidrodinamik Fluida Kental Tak Tunak dengan Konveksi Paksa yang Mengalir Melewati Bola Teriris," Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2016.
- [5] D. . Khalimah, "Analisa Aliran Tak Tunak Konveksi Paksa Fluida Kental Magnetohidrodinamik (MHD) Melewati Silinder Eliptik," Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2015.
- [6] B. Widodo, C. Imron, and R. Sahaya, "Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Viskoelatis Tersuspensi yang Melewati Pekat Datar," *J. Sains dan Seni ITS*, vol. 5, no. 2, 2016.
- [7] B. Widodo, D. A. Khalimah, F. D. S. Zainal, and C. Imron, "The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow Of A Viscous Fluid Past A Sphere," in *International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE)*, 2015.
- [8] B. Widodo, C. Imron, N. Asiyah, G. O. Siswono, T. Rahayuningsih, and Purbandini, "Viscoelastic Fluid Flow Pass A Porous Circular Cylinder When The Magnetic Field Included," *J. Math. Sci.*, vol. 99, no. 2, pp. 173–186, 2016.
- [9] B. Widodo, I. Anggriani, D. . Khalimah, F. D. S. Zainal, and C. Imron, "Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics In Micropolar Fluid Past A Sphere," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 2, pp. 291–299, 2016.