

Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Rabies pada Anjing dengan Kontrol Optimal Berupa Kontrasepsi

Nirwana F. Kridayati, Kamiran, dan Nur Asiyah

Departemen Matematika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data,

Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

e-mail: nirwanafatria@gmail.com

Abstrak—Rabies adalah penyakit *zoonosis* (penyakit yang ditularkan dari hewan ke manusia), yang disebabkan oleh virus rabies, dari genus *Lyssavirus*, dalam keluarga *Rhabdoviridae* yang dapat ditularkan dari air liur hewan penderita rabies ketika menggigit atau menggores seseorang. Model penyebaran penyakit yang digunakan terdiri dari lima persamaan yang terdiri dari subpopulasi anjing yang rentan terhadap penyakit, subpopulasi anjing yang terinfeksi tapi belum menunjukkan tanda-tanda, subpopulasi rabies bentuk tenang, subpopulasi rabies bentuk ganas, dan subpopulasi anjing yang divaksinasi. Sistem diberi kontrol berupa kontrasepsi pada subpopulasi anjing yang rentan terhadap penyakit untuk mencegah penyebaran. Studi ini membahas tentang analisis pada model dengan menentukan bilangan reproduksi dasar, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, dan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz. Kemudian dilakukan kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Pontryagin. Solusi numerik diberikan dengan metode Runge-Kutta dan dengan simulasi menggunakan software MATLAB.

Kata Kunci—Kestabilan Routh-Hurwitz, Kontrol Optimal, Metode Runge-Kutta, Model rabies, Prinsip Maksimum Pontryagin.

I. PENDAHULUAN

RABIES adalah penyakit *zoonosis* (penyakit yang ditularkan dari hewan ke manusia), yang disebabkan oleh virus rabies, dari genus *Lyssavirus*, dalam keluarga *Rhabdoviridae*. Virus rabies menyerang sistem syaraf mamalia. Hal ini dapat ditularkan dari air liur hewan penderita rabies ketika menggigit atau menggores seseorang. Menjilat luka atau menyentuh atau merusak kulit, atau pada lapisan mulut dan hidung, dapat juga menularkan penyakit [1].

Rabies merupakan masalah kesehatan masyarakat dunia, termasuk Indonesia dimana 24 provinsi endemis rabies dari 34 provinsi dan 10 provinsi bebas rabies yaitu Provinsi Kepulauan Bangka Belitung, Kepulauan Riau, DKI Jakarta, Jawa Tengah, DI Yogyakarta, Jawa Timur, Nusa Tenggara Barat, Papua Barat, Papua dan Kalimantan Barat [2]. Anjing merupakan penyebab 99% dari kasus rabies pada manusia, namun virus dapat ditularkan dari hewan rabies. Kasus rabies pada manusia terjadi karena gigitan kucing, kelelawar, luwak, serigala, rubah dan hewan karnivora lainnya. Di seluruh dunia, rabies akibat gigitan monyet dan tikus jarang terjadi. Banyak hewan menjadi agresif dan menggigit ketika mereka menderita rabies, termasuk pada kuda dan keledai. Sapi dan kerbau tidak menggigit ketika terkena rabies, tetapi tindakan pencegahan harus dilakukan

saat memeriksa hewan sakit yang mengeluarkan air liur [1]. Sebagian besar sumber penularan rabies di Indonesia, disebabkan oleh gigitan anjing yang terinfeksi rabies (98%), dan lainnya oleh kera dan kucing. Infeksi rabies pada hewan maupun pada manusia yang telah menunjukkan gejala dan tanda klinis rabies pada otak (*Encephalomyelitis*) berakhir dengan kematian [2].

Pemodelan matematika telah digunakan secara luas untuk mendeskripsikan permasalahan riil, termasuk penyebaran suatu penyakit menular. Perilaku model dapat diamati melalui kestabilan titik setimbang pada model. Dengan diketahuinya perilaku model maka dapat ditentukan strategi untuk penekanan penyebaran penyakit tersebut.

Model matematika penyebaran rabies sudah banyak diteliti pada jurnal dan studi. Anik Zainurrahmah [3] menganalisis model matematika penyebaran rabies pada anjing dengan vaksinasi. Dalam penelitian ini didapatkan perbandingan simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit rabies pada anjing dengan vaksinasi dan tanpa vaksinasi, pada populasi anjing terinfeksi namun belum menunjukkan tanda-tanda dan populasi anjing terinfeksi terlihat berkurang pada model dengan vaksinasi dibandingkan tanpa vaksinasi. Nia Arifatul Laili [4] menganalisis kestabilan dan kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit rabies pada anjing dengan pengaruh migrasi. Dalam penelitiannya disimpulkan bahwa berdasarkan hasil simulasi numerik pada model matematika penyebaran penyakit rabies pada anjing dengan pengaruh migrasi didapatkan pemberian kontrol merupakan langkah paling efektif dan efisien untuk meminimalkan jumlah populasi anjing yang *terexposed* rabies dan jumlah populasi anjing yang terinfeksi penyakit rabies baik untuk daerah satu maupun daerah dua, serta dapat meminimalkan biaya.

Eti Dwi Wiraningsih, dkk [5] menganalisis kontrol optimal model SEIR rabies antara anjing dan manusia dengan pengaruh vaksinasi pada anjing. Tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis strategi distribusi vaksin yang optimal dengan meminimalkan biaya pengendalian dan penyebaran penyakit (meminimalkan populasi terinfeksi dan populasi rentan). Kittiyanee Sornsong, dkk [6] mengembangkan dan menganalisis model matematika untuk transmisi dinamis model SEIR rabies dengan langkah-langkah kontrol isolasi dan pemberantasan.

Dalam studi ini dibahas model rabies dengan memasukkan parameter kontrol penggunaan kontrasepsi untuk anjing rentan. Selain itu, akan dilakukan analisis kestabilan dan kontrol optimal penyakit menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin guna menentukan strategi yang optimal untuk mengendalikan penyebaran penyakit.

II. DASAR TEORI

A. Model Penyakit Rabies

Model matematika penyakit rabies berdasarkan pada penelitian yang dilakukan oleh Anik Zainurifah [3] adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + a(S + E + V) - (b + mN)S - vS + \delta V \tag{2.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \sigma E - (b + mNE) \tag{2.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I - (b + mN)I \tag{2.3}$$

$$\frac{dV}{dt} = vS - \delta V - (b + mN)V \tag{2.4}$$

Keterangan:

- S : Subpopulasi anjing yang rentan terhadap penyakit
- E : Subpopulasi anjing yang terinfeksi tapi belum menunjukkan tanda-tanda
- I : Subpopulasi anjing yang terinfeksi
- V : Subpopulasi anjing yang divaksinasi
- a : Laju kelahiran anjing
- b : Laju kematian alami anjing
- σ : Laju berakhirnya masa inkubasi penyakit
- γ : Laju kematian karena penyakit pada anjing
- δ : Laju anjing kehilangan kekebalan dari vaksin
- β : Tingkat penularan penyakit per kontak
- v : Tingkat vaksinasi anjing
- m : Probabilitas kematian total populasi
- K : Kapasitas pendukung

B. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan digunakan untuk mengetahui nilai dari bilangan reproduksi dasar.

Definisi [7]

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$. Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Pada kasus epidemiologi dapat diklasifikasikan menjadi dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah kesetimbangan saat kelas terinfeksi nol atau saat penyakit tidak menyebar dalam populasi. Titik kesetimbangan endemik adalah titik kesetimbangan saat kelas terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi.

C. Pelineieran

Untuk mencari hasil pelinearan dari sistem persamaan diferensial non linear digunakan matriks Jacobi.

Definisi [8]

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Matriks

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Dinamakan matriks Jacobian dari f di titik \bar{x} .

D. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan menggunakan metode *next generation operator* [9] dengan mencari matriks F dan V dari sistem penyebaran rabies. F_i adalah

laju kemunculan infeksi pada kompartemen, V_i adalah laju perpindahan individu keluar dari kompartemen, dan x_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit, maka bilangan reproduksi dasar diperoleh dari *eigen value* terbesar dari matriks

$$\left[\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial(x_j)} \right] \left[\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial(x_j)} \right]^{-1} \tag{2.6}$$

dimana

$$F = \frac{\partial F_i(x_0)}{\partial(x_j)} \text{ dan } V = \frac{\partial V_i(x_0)}{\partial(x_j)}$$

E. Kriteria Routh-Hurwitz

Diberikan matriks Jacobian dari sistem dengan titik setimbang \bar{x} sebagai berikut:

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Nilai akar-akar karakteristik dari matriks J adalah akar-akar karakteristik dari polinomial

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0 \tag{2.9}$$

Untuk mengecek kestabilan dengan kriteria Routh-Hurwitz maka disusun tabel sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ s^0 & q & & & \end{array}$$

Dimana $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$, dan q diperoleh dari :

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, \dots$$

Bila kolom pertama dalam tabel tidak ada perubahan tanda (semuanya bertanda positif atau semuanya bertanda negatif). Maka semua akar polinomial $q(s)$ bagian realnya adalah tak positif sehingga sistem tersebut adalah stabil [10].

F. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin adalah suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian optimal kontrol yang sesuai dengan tujuan. Langkah-langkah penyelesaian kontrol optimal adalah sebagai berikut [11]:

1. Bentuk Hamiltonian
 $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t) + \lambda'(t)f(x(t)), u(t), t)$
2. Memaksimalkan H terhadap $u(t)$ dengan cara:
 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$
 Sehingga diperoleh kondisi stasioner
 $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$
3. Dengan menggunakan $u^*(t)$ yang diperoleh dari langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian baru yang optimal, $H^*(t)$, yaitu :
 $H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = H(x^*(t), \lambda^*(t), t)$
4. Selesaikan persamaan *state* dan *costate*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \text{ dan } \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$$

Dengan kondisi batas diberikan oleh kondisi transversal (keadaan awal dan keadaan akhir) yaitu:

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)'_{t_f} \delta x_f = 0$$

Dengan S adalah bentuk Mayer dari fungsi tujuan J , H adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda $*$ menunjukkan keadaan saat variabel kontrolnya stasioner.

- Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kontrol yang optimal.

G. Metode Runge Kutta Orde 4

Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut: $y' = f(t, y)$ dengan syarat batas $y(t_0) = y_0$. Secara iterasi penyelesaian Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut [11]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.10}$$

dengan

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3)$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

a) Studi Literatur

Pada tahap ini akan dilakukan identifikasi permasalahan yang diangkat dalam topik Studi ini. Kemudian mencari materi dari permasalahan yang diambil yaitu tentang kontrol optimal pada penyebaran penyakit rabies pada anjing dengan menggunakan kontrasepsi baik dari jurnal, buku, dan lain sebagainya. materi yang harus dipelajari adalah dasar-dasar teori mengenai rabies, model penyakit rabies, metode Prinsip Maksimum Pontryagin dan metode Runge Kutta.

b) Pembentukan Model Matematika

Untuk memahami penyebaran penyakit rabies disusun asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan subpopulasi anjing yang rentan terhadap penyakit, subpopulasi anjing yang terinfeksi tapi belum menunjukkan tanda-tanda, subpopulasi rabies fase tenang, subpopulasi rabies fase ganas, dan subpopulasi anjing yang divaksinasi.

c) Menganalisis titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan kestabilan

Pada tahap ini akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit ($E = I_1 = I_2 = 0$) dan titik kesetimbangan endemik ($E, I_1, I_2 \neq 0$) dengan substitusi persamaan model. Selanjutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar dengan metode *next generation operator* yang kemudian akan dianalisis kestabilan pada titik-titik kesetimbangan.

d) Kontrol optimal dengan Prinsip Maksimum Pontryagin

Pada tahap ini akan ditentukan kontrol yang akan dipakai untuk mereduksi penyebaran rabies dan menyelesaikan masalah kontrol optimal dari model rabies menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Langkah-langkah penyelesaiannya adalah dengan menentukan model kontrol optimal, menentukan fungsi objektif, membentuk persamaan Hamiltonian, menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi.

e) Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada tahap ini akan ditentukan penyelesaian numerik kontrol optimal dengan menggunakan metode Runge-Kutta dan akan dibandingkan simulasi sebelum dan sesudah penerapan kontrol optimal menggunakan MATLAB.

f) Menarik Kesimpulan dan Saran

Tahap akhir adalah penarikan kesimpulan terhadap pembahasan yang telah dilakukan dan penulisan laporan Studi serta pemberian saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model penyebaran yang digunakan terdiri dari lima persamaan yang terdiri dari subpopulasi anjing yang rentan terhadap penyakit, subpopulasi anjing yang terinfeksi tapi belum menunjukkan tanda-tanda, subpopulasi rabies fase tenang, subpopulasi rabies fase ganas, dan subpopulasi anjing yang divaksinasi. Sistem merepresentasikan model SEI_1I_2V dapat dikonstruksi sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = a(S + E + V) + \delta V - vS - \mu S - \beta(I_1 + I_2)S + (1 - \pi)\sigma E \tag{1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta(I_1 + I_2)S - \mu E - vE - \sigma E \tag{2}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \pi\sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1 \tag{3}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2 \tag{4}$$

$$\frac{dV}{dt} = vS + vE - \mu V - \delta V$$

Dengan $0 \leq u_1 \leq 1$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat diperoleh dengan menyatakan ruas kiri pada persamaan (1), (2), (3), (4), dan (5) bernilai nol, kemudian disubstitusikan $E = I_1 = I_2 = 0$ sehingga akan diperoleh titik $E_0 = (S^0, E^0, I_1^0, I_2^0, V^0)$. Telah diketahui pada titik kesetimbangan bebas penyakit bahwa $E = I_1 = I_2 = 0$. Maka, selanjutnya akan dicari nilai dari S^0 dan V^0 .

$$vS + vE - \mu V - \delta V = 0 \tag{6}$$

$$a(S + E + V) + \delta V - vS - \mu S - \beta(I_1 + I_2)S + (1 - \pi)\sigma E = 0 \tag{7}$$

Dengan menyelesaikan (6) dan (7), sehingga didapatkan:

$$V^0 = \frac{vN}{(\mu + \delta + v)} \tag{8}$$

$$S^0 = \frac{vN(a + \delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - a)} \tag{9}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{vN(a + \delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - a)}, 0, 0, 0, \frac{vN}{(\mu + \delta + v)} \right)$$

Titik kesetimbangan endemik menunjukkan adanya kemungkinan penyebaran penyakit, yaitu berarti bahwa pada keadaan endemik populasi infeksi $E \neq I_1 \neq I_2 \neq 0$. Untuk mencari kesetimbangan endemik dapat diperoleh dengan menyatakan ruas kiri pada persamaan persamaan (1), (2), (3), (4), dan (5) bernilai nol sehingga diperoleh $E_* = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, V^*)$.

$$a(S + E + V) - \gamma I_2 - \mu(S + E + I_1 + I_2 + V) = 0 \tag{10}$$

$$\lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2 = 0 \tag{11}$$

$$\pi\sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1 = 0 \tag{12}$$

$$\beta(I_1 + I_2)S - \mu E - vE - \sigma E = 0 \tag{13}$$

$$vS + vE - \mu V - \delta V = 0 \tag{6}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (6), (10)-(13) diperoleh titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

$$E_* = \left(\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)}, \frac{(\mu+\lambda)}{a\pi\sigma} \left((a + \gamma) \frac{\lambda N(a-\mu)}{(\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma))} \cdot -N(a-\mu) \right) \right), \frac{1}{a} \left((a + \gamma) \frac{\lambda N(a-\mu)}{(\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma))} \cdot -N(a-\mu) \right) \right), \frac{v}{(\mu+\delta)\pi\sigma} \left(\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\beta(\mu+\gamma+\lambda)} + \frac{(\mu+\lambda)}{a} \left((a + \gamma) \frac{\lambda N(a-\mu)}{(\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma))} \cdot -N(a-\mu) \right) \right) \right)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\beta v N(a+\delta)}{(\mu+\delta+v)(v+\mu-a)} & a+\delta \\ \frac{\beta v N(a+\delta)}{(\mu+\delta+v)(v+\mu-a)} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\mu-\gamma & 0 \\ 0 & -\mu-\delta \end{bmatrix}$$

Kompartemen terinfeksi adalah E , I_1 , dan I_2 . Matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} untuk sistem penyebaran rabies pada persamaan (1) - (5) adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta(I_1 + I_2)S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\mu + v + \sigma)E \\ -\pi\sigma E + (\mu + \lambda)I_1 \\ -\lambda I_1 + (\mu + \gamma)I_2 \end{bmatrix}$$

Dengan turunan parsial terhadap E , I_1 , dan I_2 . Kemudian diperoleh matriks F sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta S & \beta S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan diperoleh matriks V sebagai berikut:

$$V = \begin{bmatrix} \mu + v + \sigma & 0 & 0 \\ -\pi\sigma & \mu + \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \mu + \gamma \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan determinan dan adjoin dari matriks V diperoleh nilai invers matriks V adalah sebagai berikut:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu + v + \sigma} & 0 & 0 \\ \frac{\pi\sigma}{(\mu + v + \sigma)(\mu + \lambda)} & \frac{1}{\mu + \lambda} & 0 \\ \frac{\pi\sigma\lambda}{(\mu + v + \sigma)(\mu + \lambda)(\mu + \gamma)} & \frac{\lambda}{(\mu + \lambda)(\mu + \gamma)} & \frac{1}{\mu + \gamma} \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan FV^{-1} didapatkan:

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \beta S \left(\frac{\pi\sigma}{(\mu+v+\sigma)(\mu+\lambda)} + \frac{\pi\sigma\lambda}{(\mu+v+\sigma)(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)} \right) & \beta S \left(\frac{1}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)} \right) & \frac{\beta S}{\mu+\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mencari nilai eigen dari bilangan reproduksi dasar didapatkan bilangan reproduksinya adalah

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \beta S \left(\frac{\pi\sigma}{(\mu+v+\sigma)(\mu+\lambda)} + \frac{\pi\sigma\lambda}{(\mu+v+\sigma)(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)} \right)$$

Matriks Jacobian dari sistem persamaan diferensial model adalah:

$$J = \begin{bmatrix} a - v - \mu - \beta(I_1 + I_2) & a + (1 - \pi)\sigma & -\beta S & -\beta S & a + \delta \\ \beta(I_1 + I_2) & -\mu - v - \sigma & \beta S & \beta S & 0 \\ 0 & \pi\sigma & -\mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu - \gamma & 0 \\ v & v & 0 & 0 & -\mu - \delta \end{bmatrix}$$

Telah diketahui sebelumnya bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit adalah $E_0 = \left(\frac{vN(a+\delta)}{(\mu+\delta+v)(v+\mu-a)}, 0, 0, 0, \right)$ maka

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} a - v - \mu & a + (1 - \pi)\sigma & -\frac{\beta v N(a + \delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - a)} & -\frac{\beta v N(a + \delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - a)} & a + \delta \\ 0 & -\mu - v - \sigma & \frac{\beta v N(a + \delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - a)} & \frac{\beta v N(a + \delta)}{(\mu + \delta + v)(v + \mu - a)} & 0 \\ 0 & \pi\sigma & -\mu - \lambda & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ v & v & 0 & 0 & -\mu - \delta \end{bmatrix}$$

Dengan ekspansi kolom didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$[(A + \lambda^*)(E + \lambda^*) - v(a + \delta)] = 0 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} -(B + \lambda^*) & F & F \\ \pi\sigma & -(C + \lambda^*) & 0 \\ 0 & \lambda & -(D + \lambda^*) \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

dengan $A = -a + v + \mu$, $B = \mu + v + \sigma$, $C = \mu + \lambda$, $D = \mu + \gamma$, $E = \mu + \delta$, dan $F = \frac{\beta v N(a+\delta)}{(\mu+\delta+v)(v+\mu-a)}$

dengan menggunakan diskriminan dan kriteria Routh Hurwitz sistem stabil di titik setimbang bebas penyakit jika :

$$1. (-a + v + 2\mu + \delta)^2 > 4\{(-a + v + \mu)(\mu + \delta) - v(a + \delta)\}$$

$$2. a_1 a_2 > a_3$$

dimana

$$a_1 = (B + C + D)$$

$$a_2 = (BC + BD + CD - \pi\sigma F)$$

$$a_3 = BCD - \pi\sigma F(D + F)$$

Telah diketahui sebelumnya bahwa titik setimbang endemik $E_* = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, V^*)$, maka

$$J(E_*) = \begin{bmatrix} a - v - \mu - \frac{\beta(a-\mu)N}{a} \left(\frac{(2a+\gamma)\lambda}{\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma)} - 1 \right) & a + (1-\pi)\sigma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta(a-\mu)N}{a} \left(\frac{(2a+\gamma)\lambda}{\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma)} - 1 \right) & -\mu - v - \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \gamma & 0 \\ v & v & 0 & 0 & -\mu - \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\beta(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)} & -\frac{\beta(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)} & a+\delta \\ \frac{\beta(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)} & \frac{\beta(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)} & 0 \\ -\mu-\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -\mu-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\mu-\delta \end{bmatrix}$$

Didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda_*^5 + \lambda_*^4(-A - B - C - D - F - KL) + \lambda_*^3(AB + AC + AD + AF + BC + BD + BF + CD + CF + DF + \frac{CDF}{G} - H + (B + D + F + (\pi\sigma + A))KL) + \lambda_*^2(HKL - ABC - ABD - ABF - ACD - ACF - BCD - BCF - BDF - CDF + \frac{CDF}{G}\lambda - (A + B + F)\frac{CDF}{G}\lambda + ((C + D + F)H - BD - BF - B(\pi\sigma + A) - DF - D(\pi\sigma + A) - F(\pi\sigma + A))KL) + \lambda_*(-DHL - FHL + ABCD + ABCF + ABDF + ACDF + BCDF - (A + B)\frac{CDF}{G}\lambda + (AB + AF + BF)\frac{CDF}{G} - (CD + CF + DF)H - \frac{CDFH}{G} + (BDF + BD(\pi\sigma + A) + DF(\pi\sigma + A))KL) + (DFHKL - ABCDF + \frac{ABCDF}{G}\lambda - \frac{ABCDF}{G} + CDFH - \frac{CDFH}{G}\lambda + \frac{CDF^2H}{G} - BDF(\pi\sigma + A)KL) = 0$$

Dengan $A = a - v - \mu$, $B = -\mu - \delta$, $C = -\mu - v - \sigma$, $D = -\mu - \lambda$, $F = -\mu - \gamma$, $G = \lambda + \mu + \gamma$, $H = (a + \delta)v$, $K = \frac{\beta(a-\mu)N}{a}$, dan $L = \frac{(2a+\gamma)\lambda}{\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma)} - 1$.

system stabil di titik setimbang endemik jika :

$$1. a_1, a_5 > 0.$$

2. $a_1 a_2 > a_3$
3. $(a_1 a_2 - a_3) > \frac{a_1^2 b_2}{a_3}$
4. $(b_1 a_3 - a_1 b_2) > \frac{b_2^2 a_5}{b_2}$

Dengan

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -A - B - C - D - F - KL \\
 a_2 &= AB + AC + AD + AF + BC + BD + BF + CD + \\
 &\quad CF + DF + \frac{CDF}{G} - H + (B + D + F + (\pi\sigma + A))KL \\
 a_3 &= HKL - ABC - ABD - ABF - ACD - ACF - BCD - \\
 &\quad BCF - BDF - CDF + \frac{CDF}{G}\lambda - (A + B + F)\frac{CDF}{G}\lambda + \\
 &\quad ((C + D + F)H - BD - BF - B(\pi\sigma + A) - DF - \\
 &\quad D(\pi\sigma + A) - F(\pi\sigma + A))KL \\
 a_5 &= DFHKL - ABCDF + \frac{ABCDF}{G}\lambda - \frac{ABCDF}{G} + CDFH \\
 &\quad - \frac{CDFH}{G}\lambda + \frac{CDF^2 H}{G} - BDF(\pi\sigma + A)KL \\
 b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}
 \end{aligned}$$

Dalam model persamaan (1) sampai (5) diperluas dengan memasukkan kontrol berupa penggunaan kontrasepsi (u_1), sehingga model persamaan menjadi:

$$\frac{dS}{dt} = a(S + E + V) + \delta V - vS - \mu S - \beta(I_1 + I_2)S + (1 - \pi)\sigma E - (1 - u_1)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta(I_1 + I_2)S - \mu E - vE - \sigma E + (1 - u_1)S$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \pi\sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2$$

$$\frac{dV}{dt} = vS + vE - \mu V - \delta V$$

Dengan $0 \leq u_1 \leq 1$ adalah kontrol penggunaan kontrasepsi.

Fungsi objektif untuk model diatas diberikan:

$$J_H = \min_{u_1} \int_0^{tf} (a_1 E + b_1 u_1^2) dt$$

$a_1 S$ adalah biaya untuk banyaknya jumlah populasi S , $b_1 u_1^2$ adalah biaya untuk kontrol penggunaan kontrasepsi.

Kemudian didapat Hamiltonian H_{pm} untuk kontrol optimal sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_{pm} &= a_1 E + b_1 u_1^2 + \lambda_1 (a(S + E + V) + \delta V - vS - \mu S - \\
 &\quad \beta(I_1 + I_2)S + (1 - \pi)\sigma E - (1 - u_1)S) + \lambda_2 (\beta(I_1 + I_2)S - \\
 &\quad \mu E - vE - \sigma E + (1 - u_1)S) + \lambda_3 (\pi\sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1) + \\
 &\quad \lambda_4 (\lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2) + \lambda_5 (vS + vE - \mu V - \delta V)
 \end{aligned}$$

Sehingga didapat persamaan kendali optimal yaitu:

$$u_1^* = \max \left\{ 0, \min \left(1, \frac{S(\lambda_2 - \lambda_1)}{2b_1} \right) \right\}$$

Persamaan *state* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 S^*(t) &= \frac{\partial H_{pm}}{\partial \lambda_1} = a(S + E + V) + \delta V - vS - \mu S - \\
 &\quad \beta(I_1 + I_2)S + (1 - \pi)\sigma E - \left(1 - \frac{S(\lambda_2 - \lambda_1)}{2b_1} \right) S
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E^*(t) &= \frac{\partial H_{pm}}{\partial \lambda_2} = \beta(I_1 + I_2)S - \mu E - vE - \sigma E + \\
 &\quad \left(1 - \frac{S(\lambda_2 - \lambda_1)}{2b_1} \right) S
 \end{aligned}$$

$$I_1^*(t) = \frac{\partial H_{pm}}{\partial \lambda_3} = \pi\sigma E - \mu I_1 - \lambda I_1$$

$$I_2^*(t) = \frac{\partial H_{pm}}{\partial \lambda_4} = \lambda I_1 - \mu I_2 - \gamma I_2$$

$$V^*(t) = \frac{\partial H_{pm}}{\partial \lambda_5} = vS + vE - \mu V - \delta V$$

Sedangkan persamaan *costate* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_1}{dt} &= \lambda_1 \left(-a + v + \mu + \beta(I_1 + I_2) + \left(1 - \frac{S(\lambda_2 - \lambda_1)}{2b_1} \right) \right) - \\
 &\quad \lambda_2 \left(\beta(I_1 + I_2) + \left(1 - \frac{S(\lambda_2 - \lambda_1)}{2b_1} \right) \right) - \lambda_5 (v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\lambda_2}{dt} &= -a_1 - \lambda_1 (a + (1 - \pi)\sigma) - \lambda_2 (-\mu - v - \sigma) - \\
 &\quad \lambda_3 \pi\sigma - \lambda_5 v
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{((\lambda_1 - \lambda_2)\beta S)^2}{2b_1} (I_1 + I_2) - \lambda_3 (-\mu - \lambda) - \lambda_4 \lambda$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = \frac{((\lambda_1 - \lambda_2)\beta S)^2}{2b_1} (I_1 + I_2) + \lambda_4 \gamma$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = -\lambda_1 (a + \delta) - \lambda_5 (-\mu - \delta)$$

Kemudian dilakukan simulasi menggunakan metode numerik Runge Kutta dengan nilai awal diasumsikan sebagai berikut :

$$S(0) = 350$$

$$E(0) = 200$$

$$I_1(0) = 35$$

$$I_2(0) = 15$$

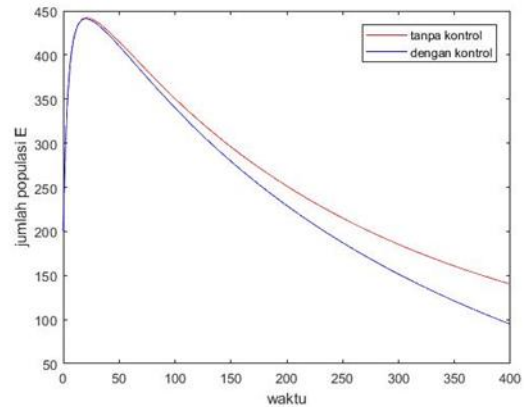
$$V(0) = 200$$

dengan waktu akhir adalah 400 hari dengan nilai parameter terdapat pada Tabel 1.

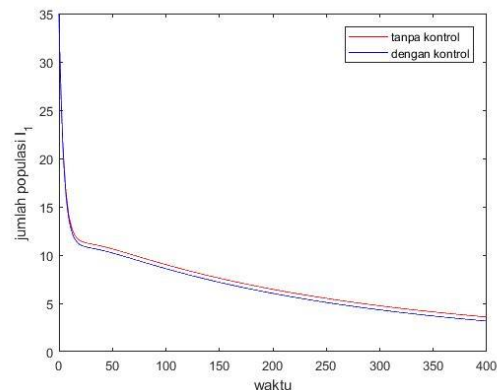
Tabel 1.
Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
a	0,001150685	v	0,0004931506
μ	0,0009041096	π	0,4
σ	0,011	λ	0,17543859
γ	0,25	a_1	0,0001
δ	0,001369863	b_1	0,0001
β	0,003424657		

Hasil simulasinya adalah sebagai berikut:

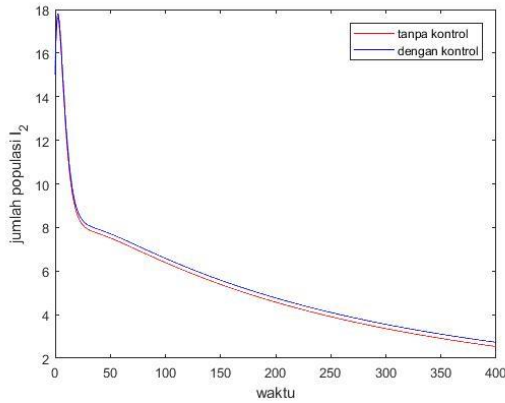


Gambar 1. Grafik Populasi E pada Simulasi.



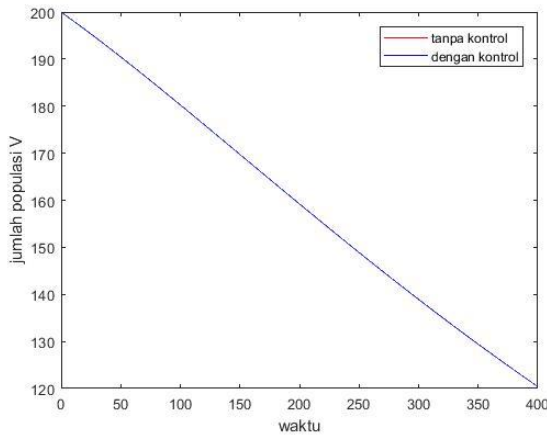
Gambar 2. Grafik Populasi I1 pada Simulasi.

Dari Gambar 1 dan Gambar 2 dapat diamati bahwa terjadi penurunan pada jumlah populasi terinfeksi tapi belum menunjukkan tanda-tanda dan pada populasi anjing terinfeksi pada rabies bentuk tenang. Dengan pemberian kontrol u_1 , 32,43% populasi anjing terinfeksi tapi belum menunjukkan tanda-tanda dapat direduksi. Begitu halnya dengan anjing terinfeksi pada rabies bentuk tenang terjadi penurunan sebanyak 11,79%. Hal ini menunjukkan bahwa pemberian kontrol kontrasepsi cukup efektif dalam mengurangi populasi E dan I_1 .

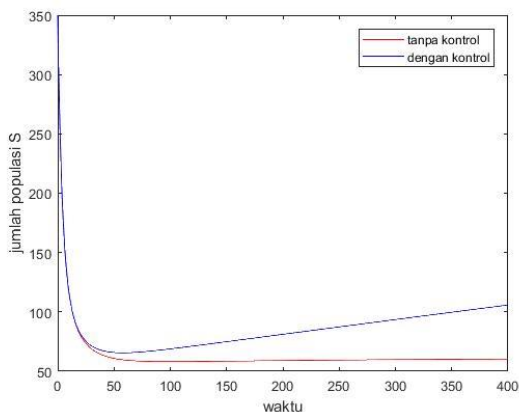


Gambar 3. Grafik Populasi I_2 pada Simulasi.

Pada Gambar 3 menunjukkan bahwa terjadi peningkatan pada populasi anjing terinfeksi pada rabies bentuk ganas. Dengan pemberian kontrol u_1 pada simulasi menaikkan populasi tersebut sebesar 7,67%. Hal ini bisa saja terjadi karena tidak ada kontrol untuk mengurangi populasi terinfeksi pada populasi anjing terinfeksi pada rabies bentuk ganas.



Gambar 4. Grafik Populasi V pada Simulasi.



Gambar 5. Grafik Populasi S pada Simulasi

Pada Gambar 4 dapat diamati tidak ada perbedaan pada populasi anjing yang divaksinasi ketika diberi kontrol maupun tidak. Pada hasil simulasi, pemberian kontrol menaikkan populasi sebesar 0.0005%, yang mana nilai yang sangat kecil sekali. Pada grafik dapat diamati terjadi penurunan yang sangat signifikan pada populasi tersebut. Hal ini bisa saja terjadi karena populasi anjing kehilangan kekebalan dari vaksin dan mengalami kematian alami.

Selanjutnya, pada Gambar 4.6 dapat dilihat terdapat peningkatan pada populasi anjing yang rentan. Peningkatan populasi pada simulasi bernilai sebesar 75,53%. Hal ini dapat terjadi karena adanya anjing yang terinfeksi tapi belum menunjukkan tanda-tanda tidak mengalami gejala-gejala rabies sehingga kembali populasi yang rentan dan hilangnya kekebalan dari vaksin pada populasi anjing yang divaksinasi.

Kemudian dari perhitungan MATLAB menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin dan metode Runge Kutta yang telah dijelaskan pada sub bab 4.10, yang mana didapatkan *state* dan *costate* yang kemudian disimulasikan di *software* dengan *source code* terdapat pada Lampiran diperoleh perhitungan hasil nilai fungsi objektif J yaitu sebesar 10,763 dengan nilai u_1 sebesar 0.499. Hal tersebut dapat diartikan fungsi objektif merupakan fungsi biaya dan nilai kontrol u_1 merupakan presentase populasi, dimana berarti biaya yang dibutuhkan pada penggunaan kontrol tersebut adalah sebesar 10,673 dengan penggunaan kontrol yang optimal adalah 49,9%.

V. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan yang telah disajikan dapat disimpulkan:

1. Diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{vN(a+\delta)}{(\mu+\delta+v)(v+\mu-a)}, 0, 0, 0, \frac{vN}{(\mu+\delta+v)} \right)$$

Sistem stabil di titik setimbang bebas penyakit jika :

- a) $(-a + v + 2\mu + \delta)^2 > 4\{(-a + v + \mu)(\mu + \delta) - v(a + \delta)\}$
- b) $a_1 a_2 > a_3$

2. Diperoleh titik kesetimbangan endemik E_*

$$E_* = \left(\frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\pi\sigma\beta(\mu+\gamma+\lambda)}, \frac{(\mu+\lambda)}{a\pi\sigma} \left((a + \gamma) \frac{\lambda N(a-\mu)}{(\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma))} \cdot -N(a-\mu) \right), \frac{1}{a} \left((a + \gamma) \frac{\lambda N(a-\mu)}{(\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma))} \cdot -N(a - \mu) \right), \frac{\lambda N(a-\mu)}{(\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma))} \cdot -N(a - \mu) \right), \frac{v}{(\mu+\delta)\pi\sigma} \left\{ \frac{(\mu+\lambda)(\mu+\gamma)(\mu+v+\sigma)}{\beta(\mu+\gamma+\lambda)} + \frac{(\mu+\lambda)}{a} \left((a + \gamma) \frac{\lambda N(a-\mu)}{(\lambda(a+\gamma)+a(\mu+\gamma))} \cdot -N(a - \mu) \right) \right\}$$

Sistem stabil di titik setimbang endemik jika :

- a) $a_1, a_5 > 0$.
- b) $a_1 a_2 > a_3$
- c) $(a_1 a_2 - a_3) > \frac{a_1^2 b_2}{a_3}$
- d) $(b_1 a_3 - a_1 b_2) > \frac{b_1^2 a_5}{b_2}$

3. Dari perhitungan MATLAB diperoleh biaya yang dibutuhkan pada penggunaan kontrol tersebut adalah

sebesar 10,673 dengan penggunaan kontrol yang optimal adalah 49,9%.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] World Health Organization, "FAQs. Frequently Asked Questions On Rabies," 2013.
- [2] Kementerian Kesehatan RI, "Situasi dan Analisis Rabies, Strategi Eliminasi Rabies 2020," 2014.
- [3] A. Zainurrifah, "Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Rabies Pada Anjing dengan Vaksinasi," Surabaya, 2016.
- [4] N. A. Laili, "Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyebaran Penyakit Rabies pada Anjing dengan Pengaruh Migrasi," Surabaya, 2018.
- [5] W. Eti Dwi and et al, "Optimal Control for SEIR Rabies Model between Dogs and Human with Vaccination Effect in Dogs," in *Proceeding of the 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistics and its Applications*, 2018.
- [6] K. Sornsong and et al, "Mathematical Model for the Dynamic Transmission of Rabies with Control Measures," *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, vol. 10, no. 11, pp. 169–175, 2016.
- [7] S. Wiggins, *Introduction of Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [8] J. Hale and H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer, 1991.
- [9] P. Driessche and J. Watmough, "Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission," *Math. Biosci.*, pp. 29–48, 2002.
- [10] Subiono, *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya, 2016.
- [11] W. Boyce and R. DiPrima, "Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems." 2992.