Dimensi Metrik Lokal pada Amalgamasi Graf Lengkap dengan Graf Roda dan Graf Kincir

Seagel Levin dan Darmaji
Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: seagellevin@gmail.com

***Abstrak*—Diberikan graf terhubung G dengan himpunan simpul $V(G)$, dan simpul $u, v \in V(G)$. Jarak antara u dan v, dinotasikan $d(u,v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G. Jika $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ himpunan terurut dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda, maka W dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan banyak anggota minimum disebut dimensi metrik dan dinotasikan $\dim(G)$. Apabila representasi untuk setiap dua simpul yang bertetangga di $V(G)$ berbeda terhadap W, maka W dikatakan sebagai himpunan pembeda lokal dari G. Himpunan pembeda lokal dari G dengan banyak anggota minimum disebut dimensi metrik lokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$. Pada penelitian ini diperoleh dimensi metrik lokal dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf lengkap dengan graf roda dan graf kincir.**

***Kata Kunci*—Dimensi Metrik, Dimensi Metrik Lokal, Amalgamasi Graf.**

I. PENDAHULUAN

SUATU graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong $V(G)$ yang unsur-unsurnya disebut simpul dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang unsur-unsurnya disebut sisi, sedemikian hingga setiap sisi e dalam $E(G)$ merupakan pasangan dari simpul-simpul di (G), yang dinotasikan $G = (V, E)$ [1].

Diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari simpul-simpul dalam graf terhubung G dan simpul v di $V(G)$, maka representasi dari simpul v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap simpul $v \in V(G)$ berbeda, maka dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, yang dinotasikan $\dim(G)$. Apabila $r(v|W)$ untuk setiap dua simpul yang bertetangga di $V(G)$ dengan $v \in V(G)$ adalah berbeda, maka W dikatakan sebagai himpunan pembeda lokal dari G. Himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum disebut dimensi metrik lokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$ [2].

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Amalgamasi

Dalam membentuk sebuah graf baru, salah satu cara yang dapat dilakukan yaitu dengan menggunakan operasi amalgamasi. Amalgamasi simpul dari pasangan simpul graf (G,u) bersama (H,v) adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan simpul dan menjadi satu simpul . Notasi yang digunakan untuk menyatakan operasi amalgamasi adalah " * " (apabila hanya diambil satu simpul dari masingmasing graf) atau " $*_2$" (apabila diambil dua simpul dari masing –masing graf) [3].

Dalam pengerjaan studi ini akan digunakan dua jenis amalgamasi,yaitu amalgamasi pusat dan amalgamasi tepi.

B. Amalgamsi Pusat

Amalgamasi pusat dari K_n & W_m atau K_n & W_2^m adalah operasi pada graf dengan menghimpitkan sebarang simpul di K_n dengan simpul pusat di W_m atau W_2^m. Simpul Pusat graf roda W_m, $m \geq 5$ adalah simpul pada graf roda yang bertetangga dengan semua simpul lain di W_m. Simpul Pusat graf kincir W_2^m, $m \geq 2$ adalah simpul di graf kincir yang bertetangga dengan semua simpul lain di W_2^m. Amalgamasi pusat pada sebarang graf K_n dan W_m atau W_2^m dinotasikan dengan $amal_p(K_n(v), W_m(u))$. Contoh dari graf hasil amalgamasi pusat ditunjukkan pada Gambar 1.

C. Amalgamsi Tepi

Amalgamasi tepi dari K_n & W_m atau K_n & W_2^m adalah operasi pada graf dengan menghimpitkan sebarang simpul di K_n dengan simpul tepi di W_m atau W_2^m .Simpul tepi graf roda W_m, $m \geq 5$ adalah simpul di graf roda yang berderajat tiga. Simpul tepi graf kincir W_2^m, $m \geq 2$ adalah simpul pada graf kincir yang berderajat dua. Amalgamasi tepi pada sebarang graf K_n dan W_m atau W_2^m dinotasikan dengan $Amal_t(K_n(v), W_m(u))$. Contoh dari graf hasil amalgamasi tepi ditunjukkan pada Gambar 2.

III. PEMBAHASAN

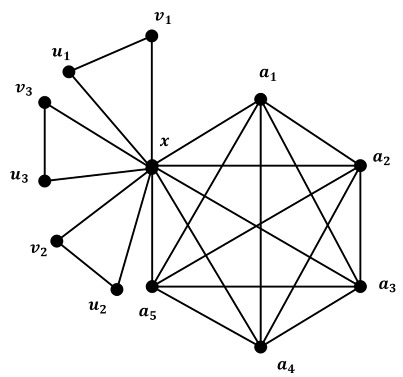
A. Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Pusat Graf Roda dan Graf Lengkap

1) Teorema 4.1

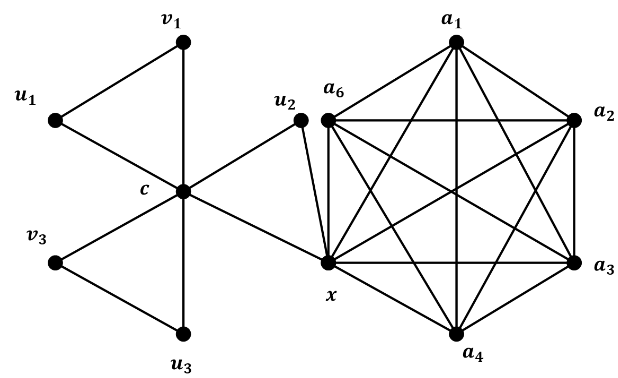
Jika amalgamasi pusat dari sebuah graf lengkap K_n dan graf roda W_m dinotasikan sebagai $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ dan, $m > 5$, $m \in \mathbb{Z}$, maka $dim_l\left(amal_p(K_n(a_n), W_m(b))\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$.

Bukti:

Misalkan $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$ adalah graf dengan $n \geq 1$ dan > 5. Pertama akan dicari batas atas dari dimensi metrik lokal graf $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$. Simpul-simpul K_n yang



Gambar 1. $Amal_p(K_6(a_6), W_2^3(c))$.



Gambar 2. $Amal_t(K_6(a_5), W_2^3(v_2))$.

menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_m berjumlah $\left\lceil\frac{m-1}{4}\right\rceil$ dengan syarat tidak ada 4 simpul tepi pada W_m yang bukan anggota W yang berurutan. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1, a_2, \ldots b_1, b_5, \ldots\}$. Maka representasi dari semua simpul graf $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$ adalah sebagai berikut

$$r(x|W) = (1,1,1, \ldots, 1,1,1, \ldots);$$
$$r(a_1|W) = (0,1,1, \ldots, 2,2,2, \ldots);$$
$$r(a_2|W) = (1,0,1, \ldots, 2,2,2, \ldots);$$
$$\vdots$$
$$r(b_1|W) = (2,2,2, \ldots, 0,2,2, \ldots);$$
$$r(b_2|W) = (2,2,2, \ldots 1,2,2, \ldots);$$
$$r(b_3|W) = (2,2,2, \ldots 2,2,2, \ldots);$$
$$\vdots$$

Semua simpul anggota $V(amal_p(K_n(a_n), W_m(b)))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan anggota himpunan W adalah $|W| = (n-2) + \left\lceil(\frac{(m-1)}{4})\right\rceil$, maka $dim_l\left(amal_p(K_n(a_n), W_m(b))\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$.

Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik lokal graf $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$ adalah $dim_l\left(amal_p(K_n(a_n), W_m(b))\right) \geq ldim(K_n) + dim_l(W_m) - 1$. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_p\left(K_n(a_n), W_m(b)\right)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

(1) Jika simpul anggota $W \in V(K_n), |V(K_n)| < n-2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama dan bertetangga.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul Bersama. Simpul bersama adalah simpul yang dilekatkan pada operasi amalgamasi graf . Maka

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1, \ldots, 2,2,2, \ldots).$$

(2) Jika simpul anggota $W \in V(W_m), |V(W_m)| < \frac{(m-1)}{4}$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama dan bertetangga. Misal $b_1, b_2 \in V(W_m)$ dan $b_1, b_2 \notin W$, serta x dan y bukan merupakan simpul bersama. Maka

$$r(b_1|W) = r(b_2|W) = (2,2, \ldots, 1,1,1, \ldots)$$

Dari kemungkinan yang ditunjukkan pada Gambar 3 engan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama dan bertetangga, jadi W dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_p(K_n(a_n), W_m(b))$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\left(amal_p(K_n(a_n), W_m(b))\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ maka terbukti. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_p(K_2(a_2), W_m(b))$ adalah $dim_l(amal_p(K_2(a_2), W_m(b))) = dim_l(W_m)$, yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut, misal a_1 merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_p(K_2(a_2), W_m(b))$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \neq r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, W_m dengan $m = 5$, dimensi metrik lokal graf $amal_p(K_n(a_n), W_5(b))$. W_m memiliki dimensi metrik lokal $dim_l(W_5) = 2$, jadi dimensi metrik lokal untuk graf $amal_p(K_n(a_n), W_5(b))$ adalah $dim_l\left(amal_p(K_n(a_n), W_5(b))\right) = dim_l(K_n) + 2 - 1 = dim_l(K_n) + 1$.

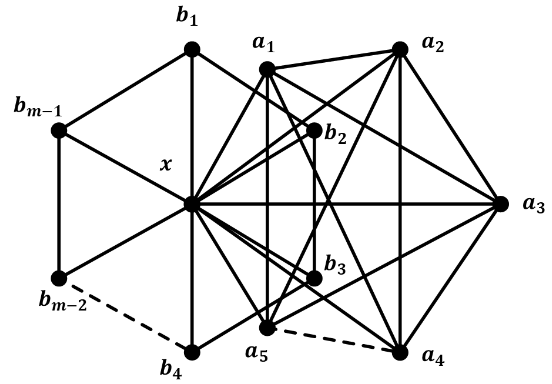
B. Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Tepi Graf Roda dan Graf Lengkap

1) Teorema 4.2

Jika amalgamasi tepi dari sebuah graf lengkap K_n dan graf roda W_m dinotasikan sebagai $amal_t(K_n(a_n), W_m(b_m)), n \geq 3, n \in \mathbb{Z}, m > 5$, dan $m \in \mathbb{Z}$, maka $dim_l\left(amal_t(K_n(a_n), W_m(b_{m-1}))\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$.

Bukti:

Misalkan $amal_t(K_n(a_n), W_m(b_{m-1}))$ adalah graf dengan $n \geq 3$ dan > 5 . Pertama akan dicari batas atas dari dimensi



Gambar 3. $amal_n(K_n(a_n), W_m(b))$.

metrik lokal graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$. simpul-simpul K_n yang menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_m berjumlah $\left\lceil\frac{m-1}{4}\right\rceil - 1$ dengan syarat tidak ada 4 simpul tepi pada W_m yang bukan anggota W dan juga bukan merupakan simpul bersama yang berurutan. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, b_1, b_5, \dots\}$. Representasi dari semua simpul graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$ adalah sebagai berikut

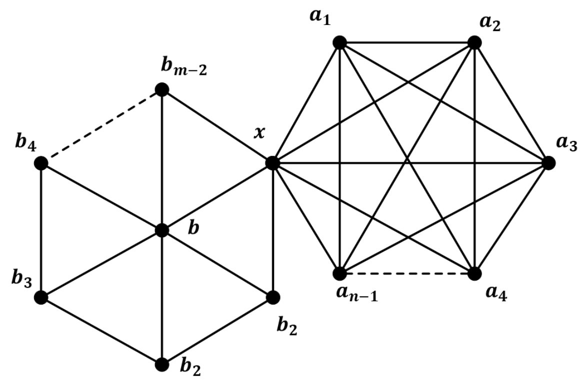
$$r(a_1|W) = (0,1,1,\dots,2,3,3,\dots);$$
$$r(a_2|W) = (1,0,1,\dots,2,3,3,\dots);$$
$$r(a_2|W) = (1,1,0,\dots,2,3,3,\dots);$$
$$\vdots$$
$$r(x|W) = (1,1,1,\dots,1,2,2,\dots);$$
$$r(b_1|W) = (2,2,2,\dots,0,2,2,\dots);$$
$$r(b_2|W) = (3,3,3,\dots 1,2,2,\dots);$$
$$r(b_3|W) = (3,3,3,\dots 2,2,2,\dots);$$
$$\vdots$$
$$r(b|W) = (2,2,2,\dots,1,1,1,\dots);$$

Semua simpul anggota $V\big(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\big)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan $|W| = (n-2) + \left\lceil\frac{m-1}{4}\right\rceil - 1$, maka $dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\right) \le dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$ adalah $dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\right) \ge dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

(1) Jika simpul anggota $W \in V(K_n), |V(K_n)| < n-2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul bersama.. Maka

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1,1 \dots,3,3,3,\dots).$$



Gambar 4. $amal_t(K_n(a_n), W_m(b_{m-1}))$.

(2) Jika simpul anggota $W \in V(W_m), |V(W_m)| < \left\lceil\frac{m-1}{4}\right\rceil - 1$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, karena satu dari simpul tepi graf W_m merupakan simpul bersama. Misal $b_1, b_2 \in V(W_m)$ dan $b_1, b_2 \notin W$, serta b_1 dan b_2 bukan merupakan simpul bersama, maka

$$r(b_1|W) = r(b_2|W) = (3,3,3,\dots,1,1,1,\dots)$$

Dari kemungkinan yang ditunjukkan pada Gambar 4 dengan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, jadi W dengan $|W| \le dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$ bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_m(b_{m-1})\big)\right) \le dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$ maka terbukti. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_t\big(K_2(a_2), W_m(b_{m-1})\big)$ adalah $dim_l(amal_t\big(K_2(a_2), W_m(b_{m-1})\big)) = dim_l(W_m)$,yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut**,** misal a_1, merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_t\big(K_2(a_2), W_m(b_{m-1})\big)$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W, representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \ne r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, W_m dengan $m = 5$, dimensi metrik lokal graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_5(b_4)\big)$. W_5 memiliki dimensi metrik lokal $dim_l(W_5) = 2$, jadi dimensi metrik lokal untuk graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_5(b_4)\big)$ adalah $dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_5(b_4)\big)\right) = dim_l(K_n) + 2 - 2 = dim_l(K_n)$.

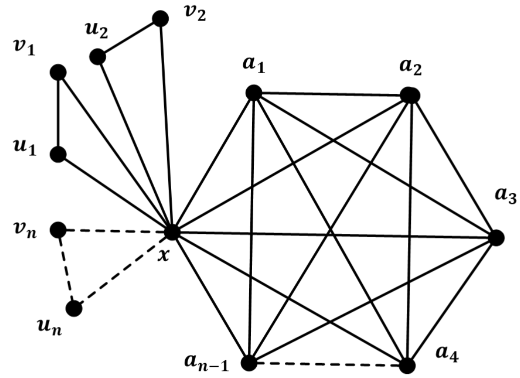
C. Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Pusat Graf Kincir dan Graf Lengkap

1) Teorema 4.3

Jika amalgamasi pusat dari sebuah graf lengkap K_n dan graf roda W_2^m dinotasikan sebagai $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$,$n \ge 3$ $n \in \mathbb{Z}$, $m \ge 2$, dan $m \in \mathbb{Z}$.

Maka $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$.

Bukti



Gambar 5. $amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))$.

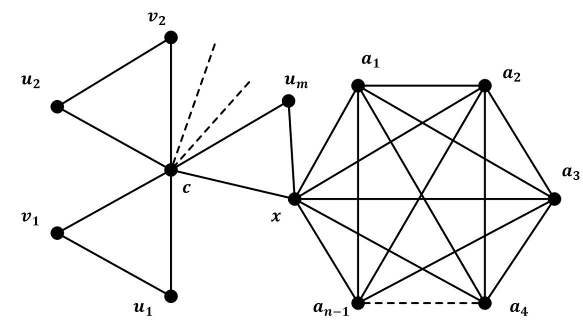
Misalkan $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$ adalah graf dengan $n \geq 3$ dan $m > 2$. diketahui bahwa dimensi metrik lokal dari graf lengkap adalah $dim_l(K_n) = n - 1$ dan dimensi metrik dari graf roda adalah $dim_l(W_2^m) = m$. Pertama akan dicari batas atas dari dimensi metrik lokal graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$. Misalkan Simpul-simpul K_n yang menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_2^m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_2^m berjumlah m dengan satu simpul tiap bilah pada W_2^m. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, u_1, u_2, \ldots u_m)$. representasi dari semua simpul graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$ adalah sebagai berikut

$$r(a_1|W) = (0,1,1, \ldots ,2,2,2, \ldots);$$
$$r(a_2|W) = (1,0,1. \ldots ,2,2,2, \ldots);$$
$$r(a_3|W) = (1,1,0, \ldots ,2,2,2, \ldots);$$
$$\vdots$$
$$r(u_1|W) = (2,2,2, \ldots ,0,2,2, \ldots);$$
$$r(v_1|W) = (2,2,2, \ldots ,1,2,2, \ldots);$$
$$r(u_2|W) = (2,2,2, \ldots ,2,0,2, \ldots);$$
$$\vdots$$
$$r(x|W) = (1,1,1, \ldots ,1,1,1, \ldots);$$

Semua simpul anggota $V(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan $|W| = (n-2) + m$, maka $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$.

Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik graf $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$ adalah $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\right) \geq ldim(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_p\left(K_n(a_n), W_2^m(c)\right)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

(1) Jika simpul anggota $W \in V(K_n) < n - 2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul Bersama.. Maka



Gambar 6. $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$.

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1 \ldots ,2,2,2).$$

(2) Jika simpul anggota $W \in V(W_2^m), |V(W_2^m)| < m - 1$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, karena satu dari simpul tepi graf W_2^m merupakan simpul bersama. Misal $u_1, v_1 \in V(W_m)$ dan $u_1, v_1 \notin W$, serta u_1 dan v_1 bukan merupakan simpul bersama. Maka

$$r(u_1|W) = r(v_2|W) = (2,2, \ldots ,1,1,1)$$

Dari kemungkinan yang ditunjukkan pada Gambar 5 dengan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, jadi W dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\left(amal_p\big(K_n(a_n), W_2^m(c)\big)\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$ maka pembuktian teorema ini telah selesai. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_p\big(K_2(a_2), W_2^m(c)\big)$ adalah $dim_l amal_p\big(K_2(a_2), W_2^m(c)\big)) = dim_l(W_2^m)$, yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut,misal a_1, merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_p\big(K_2(a_2), W_2^m(c)\big)$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W, representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \neq r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, ketika W_2^m dengan $m = 1$, graf W_2^1 isomorfis dengan K_3, dengan kata lain graf W_2^1 tidak memiliki simpul pusat maupun simpul tepi, oleh karena itu dimensi metrik lokal dari $amal_p\big(K_n(a_n), W_2^1(c)\big)$ tidak dapat dicari.

D. Dimensi Metrik Lokal Hasil Amalgamasi Tepi Graf Kincir dan Graf Lengkap

1) Teorema 4.4

Jika amalgamasi tepi dari sebuah graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dinotasikan sebagai $amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big), n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, dan $m \in \mathbb{Z}$. maka $dim_l\left(amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$.

Bukti**:**

Misalkan $amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)$ adalah graf dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ .diketahui bahwa dimensi metrik lokal dari graf lengkap adalah $dim_l(K_n) = n - 1$ dan dimensi metrik dari graf roda adalah $dim_l(W_2^m) = m$. Pertama akan dic ari batas atas dari dimensi metrik lokal graf $amal_t\big(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\big)$.

Misalkan Simpul-simpul K_n yang menjadi elemen W adalah semua simpul pada K_n kecuali simpul bersama dan satu sebarang simpul K_n. Sedangkan simpul W_2^m yang merupakan elemen W adalah simpul tepi pada W_2^m berjumlah $m-1$ dengan 1 simpul pada tiap bilah, kecuali bilah dari simpul bersama . Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $W = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2} u_1, u_2, \ldots u_{m-1})$. representasi dari semua simpul graf $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$ adalah sebagai berikut

$$r(a_1|W) = (0,1,1, \ldots, 3,3,3, \ldots);$$
$$r(a_2|W) = (1,0,1. \ldots, 3,3,3, \ldots);$$
$$r(a_3|W) = (1,1,0, \ldots, 3,3,3, \ldots);$$
$$\vdots$$
$$r(x|W) = (1,1,1, \ldots, 2,2,2, \ldots);$$
$$r(u_1|W) = (3,3,3, \ldots, 0,2,2, \ldots);$$
$$r(v_1|W) = (3,3,3, \ldots, 1,2,2, \ldots);$$
$$r(u_2|W) = (3,3,3, \ldots, 2,0,2, \ldots);$$
$$\vdots$$
$$r(c|W) = (2,2,2, \ldots, 1,1,1, \ldots);$$
$$r(u_m|W) = (2,2,2, \ldots, 2,2,2, \ldots);$$

Semua simpul anggota $V(amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m)))$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W dengan $|W| = (n-2) + m - 1$, maka $dim_l\left(amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$.

Selanjutnya akan di tunjukkan bahwa batas bawah dari dimensi metrik graf $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$ adalah $dim_l\left(amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))\right) \geq ldim(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$. Di asumsikan W adalah himpunan pembeda lokal pada graf $amal_t\left(K_n(a_n), W_2^m(v_m)\right)$ dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$. Ada 2 kemungkinan yang mungkin terjadi untuk pemilihan simpul pada W.

a. Jika simpul anggota $W \in V(K_n), |V(K_n)| < n-2$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama.tanpa mengurangi keumuman, diambil dua simpul a_1 dan a_2 dimana $a_1, a_2 \in V(K_n)$ dan $a_1, a_2 \notin W$, serta a_1 dan a_2 bukan merupakan simpul Bersama.. Maka

$$r(a_1|W) = r(a_2|W) = (1,1,1 \ldots, 3,3,3).$$

b, Jika simpul anggota $W \in V(W_2^m), |V(W_2^m)| < m-1$ maka setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, karena satu dari simpul tepi graf W_2^m merupakan simpul bersama. Misal $u_1, v_1 \in V(W_m)$ dan $u_1, v_1 \notin W$, serta u_1 dan v_1 bukan merupakan simpul bersama. Maka

$$r(u_1|W) = r(v_1|W) = (3,3,3, \ldots, 2,2,2)$$

Dari kemungkinan yang ditunjukkan pada Gambar 6 dengan pemilihan simpul anggota W dimana setidaknya ada dua simpul yang memiliki representasi yang sama, jadi W dengan $|W| < dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m)$ -2 bukan merupakan himpunan pembeda lokal. Ini bertentangan dengan pernyataan bahwa W adalah himpunan pembeda lokal dari $amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))$. Karena telah ditunjukan bahwa $dim_l\left(amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))\right) \leq dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m)$ -2 maka pembuktian teorema ini telah selesai. □

Untuk kasus khusus yaitu $n = 2$, dimensi metrik lokal graf $amal_t(K_2(a_2), W_2^m(v_m))$ adalah $dim_l amal_t(K_2(a_2), W_2^m(v_m))) = dim_l(W_2^m)$, yang demikian dapat ditunjukkan dengan penjelasan berikut, Misal a_1, merupakan satu-satunya simpul pada K_2 di $amal_t(K_2(a_2), W_2^m(v_m))$ yang bukan simpul bersama, oleh karena itu a_1 hanya bertetangga dengan a_2. Jika a_1 hanya bertetangga dengan a_n, maka untuk sebarang W, representasi simpul K_2 adalah $r(W|a_1) \neq r(W|a_2)$.

Untuk kasus lain, ketika W_2^m dengan $m = 1$, graf W_2^1 isomprfis dengan K_3, dengan kata lain graf W_2^1 tidak memiliki simpul pusat maupun simpul tepi, oleh karena itu dimensi metrik lokal dari $amal_p(K_n(a_n), W_2^1(v_m))$ tidak dapat cari.

IV. KESIMPULAN

1. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amagamasi pusat dari graf lengkap K_n dan graf roda W_m dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan, $m > 5$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\left(amal_p(K_n(a_n), W_m(b))\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 1$.
2. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amagamasi tepi dari graf lengkap K_n dan graf roda W_m dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan, $m > 5$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\left(amal_t(K_n(a_n), W_m(b_m))\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_m) - 2$.
3. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amalgamasi pusat dari graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dengan ≥ 3 $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\left(amal_p(K_n(a_n), W_2^m(c))\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 1$.
4. Dimensi metrik lokal dari graf hasil amalgamasi tepi dari graf lengkap K_n dan graf kincir W_2^m dengan ≥ 3 $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$, dan $m \in \mathbb{Z}$ adalah $dim_l\left(amal_t(K_n(a_n), W_2^m(v_m))\right) = dim_l(K_n) + dim_l(W_2^m) - 2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] N. Ibrahim, *Pengantar Kombinatorika & Teori Graf.* Yogyakarta: Graha Ilmu, 2013.

[2] F. Okamoto, B. Phinezy, and P. Zhang, "The Local Metric Dimension of a Graph," *Math. Bohem.*, vol. 135, no. 3, pp. 239–255, 2010.

[3] R. Ardiyansah and Darmaji, "Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf," *J. Sains dan Seni POMITS*, vol. 2, no. 1, p. 2, 2013.