

Desain Kendali Optimal Konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) Menggunakan Metode Prinsip Minimum Pontryagin

Fadia Nila Sihan Novita Lutfiani dan Didik Khusnul Arif
Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: fadia.17061@mhs.its.ac.id

Abstrak—Polutan Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) yang dihasilkan dari limbah industri dan transportasi dapat menyebabkan pencemaran udara, termasuk di daerah Surabaya. Pencemaran udara menimbulkan berbagai macam penyakit dan mengganggu manusia, hewan hingga tumbuhan. Pada penelitian sebelumnya telah dilakukan estimasi konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) di Kota Surabaya. Oleh karena itu, pada penelitian ini dibentuk model kendali optimal penyebaran konsentrasi polutan Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) dengan pemberian kendali berupa penghijauan untuk konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan kendali berupa pengurangan penggunaan kendaraan pribadi untuk konsentrasi Nitrogen Dioksida (NO_2) agar konsentrasinya dapat ditekan lebih rendah. Dalam penelitian ini, dijelaskan mengenai model penyebaran konsentrasi polutan dengan kendali, analisa sifat kestabilan dan keterkontrolan. Selanjutnya dilakukan penyelesaian masalah kendali optimal dengan metode Prinsip Minimum Pontryagin dan dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 menggunakan bantuan software MATLAB. Hasil simulasi numerik dengan waktu akhir 45 hari menunjukkan bahwa konsentrasi polutan yang diberikan kendali mengalami penurunan sebesar 100% untuk Karbon Monoksida (CO) dan 58.407% untuk Nitrogen Dioksida (NO_2).

Kata Kunci—Pencemaran Udara, Karbon Monoksida (CO), Nitrogen Dioksida (NO_2), Kendali Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin.

I. PENDAHULUAN

KEGIATAN industri di berbagai bidang dan transportasi muncul sebagai dampak berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi [1]. Kegiatan ini menghasilkan limbah salah satunya berupa emisi gas yang dalam jumlah tertentu mengakibatkan pencemaran udara dikarenakan adanya beban melebihi kapasitas yang harus diterima oleh lingkungan [2-3].

Pencemaran udara adalah keadaan dimana terdapat bahan polutan yang masuk kedalam atmosfer dalam jumlah tertentu sehingga memberikan efek pada manusia, binatang, vegetasi, dan material yang bersifat merusak dan merugikan [3]. Pemasangan peralatan jaringan pemantauan kualitas udara dengan tujuan untuk mengetahui dan mengukur kadar kualitas udara sudah dilakukan di Kota Surabaya. Dengan masalah ini, terdapat penelitian yang telah dilakukan untuk mengestimasi konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) dengan berbagai metode salah satunya yaitu dengan metode Fraksional Kalman Filter yang telah dilakukan oleh Sandy Editya Prakosa.

Berdasarkan penelitian tersebut, maka pada penelitian ini akan dilakukan pemodelan kendali optimal pada konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) dengan kendali berupa penghijauan pada konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan kendali berupa pengurangan penggunaan kendaraan pribadi pada konsentrasi Nitrogen Dioksida (NO_2) menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Untuk mensimulasikan model ini, dibutuhkan data observasi asli yang akan diambil dari data pengamatan harian konsentrasi polutan dari Dinas Lingkungan Hidup Kota Surabaya dengan pengambilan Kelurahan Kebonsari Kecamatan Jambangan sebagai sampel. Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

II. URAIAN MATERI

A. Model Penyebaran Konsentrasi Polutan Menurut Proses Difusi dan Adveksi

Polutan berupa Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) yang diamati dalam penelitian ini berbentuk gas. Sehingga perpindahannya di udara melalui proses difusi dan adveksi. Difusi merupakan suatu proses perpindahan zat ataupun partikel dari daerah yang berkonsentrasi tinggi ke daerah yang berkonsentrasi rendah. Hukum Fick merupakan salah satu hukum yang berlaku pada difusi yang menggambarkan fluks suatu zat dan konsentrasinya sebagai fungsi waktu dan posisi [4]. Pada Hukum Fick pertama, menyatakan bahwa fluks sebanding dengan gradien konsentrasi, sehingga persamaan difusi dapat dituliskan sebagai berikut [5]:

$$J_{Dif}(x, t) = -D_x \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

dengan

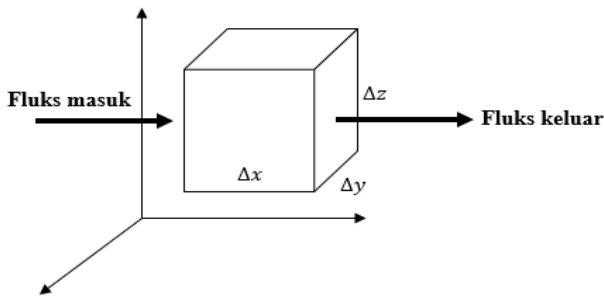
$J_{Dif}(x, t)$: fluks perpindahan massa ke arah sumbu- x pada waktu t ,

$C(x, t)$: konsentrasi polutan pada posisi x dengan waktu t ,

D_x : koefisien difusi pada arah- x ,

$\frac{\partial C(x, t)}{\partial x}$: gradien konsentrasi ke arah sumbu- x pada waktu t .

Adveksi merupakan proses transfer zat maupun partikel dari perairan ke atmosfer melalui angin atau udara.



Gambar 1. Kontrol Volume Aliran Fluida.

Persamaan adveksi dapat dituliskan sebagai berikut [5]:

$$J_{adv} = CV_x \tag{2}$$

dengan

- J_{adv} : fluks perpindahan massa secara adveksi searah sumbu x ,
- V_x : kecepatan aliran polutan pada arah x ,
- C : konsentrasi zat polutan.

Pada atmosfer akan terjadi aliran fluida yang dapat digambarkan dalam bentuk kubus 3 dimensi dengan sumbu x, y , dan z . Fluks dari polutan akan bergerak masuk menembus permukaan bidang kubus dan keluar dari bidang. Kontrol volume aliran fluida atau aliran fluks dalam atmosfer dapat diilustrasikan sebagai Gambar 1 [5]. Berdasarkan hukum kekekalan massa, maka berlaku [6]:

$$\text{Laju Perubahan fluks} = \sum \text{Aliran fluida yang masuk} - \sum \text{Aliran fluida yang keluar}$$

J_x merupakan fluks pada arah- x , dan $J_x dydz$ adalah besar fluks yang masuk pada arah sumbu- x . Sedangkan untuk besarnya aliran fluks yang keluar pada arah sumbu- x adalah $(J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx) dydz$. Berdasarkan persamaan (1) dan (2), didapatkan total fluks per satuan volume pada arah sumbu x per satuan waktu adalah sebagai berikut [5]:

$$\begin{aligned} J_x &= J_{Dif}(x, t) + J_{Adv}(x, t) \\ &= -D_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_x C \\ &= V_x C - D_x \frac{\partial C}{\partial x} \end{aligned} \tag{3}$$

Pada Tugas Akhir ini, daerah yang diamati berupa 2D (ketinggian untuk daerah yang diamati dianggap konstan), maka didapatkan laju perubahan fluks 2D dimana konsentrasi polutan berubah terhadap waktu, seperti berikut [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= - \left[\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right] \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} (J_x) + \frac{\partial}{\partial y} (J_y) \right] \end{aligned} \tag{4}$$

J_x adalah fluks pada arah- x dan J_y adalah fluks pada arah- y . Selanjutnya, persamaan (3) disubstitusikan ke dalam persamaan (4), didapatkan model penyebaran polutan (model Difusi Adveksi) [5]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (J_x) + \frac{\partial}{\partial y} (J_y) \right]$$

$$= \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] - \left[V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] \tag{5}$$

dengan

- C : Konsentrasi polutan,
- D_x : Koefisien difusi pada arah- x ,
- D_y : Koefisien difusi pada arah- y ,
- V_x : Kecepatan aliran polutan pada arah- x ,
- V_y : Kecepatan aliran polutan pada arah- y .

B. Diskritisasi

Diskritisasi merupakan proses untuk merubah model dari bentuk kontinu menjadi bentuk diskrit. Salah satu metode diskritisasi adalah metode beda hingga. Dalam model penyebaran konsentrasi polutan gas, pergerakan dari konsentrasi polutan akan didiskritisasi dengan pendekatan beda hingga maju (*forward difference*). C merupakan variabel keadaan pada model pencemaran udara yang berbentuk sistem dinamik. Variabel C dapat dituliskan dengan notasi indeks sebagai berikut [7]:

$$C(x, y, t) \sim C_{i,j}^k$$

$C(x, y, t) \sim C(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta t) \sim C_{i,j}^k$ dimana $t \approx k\Delta t$ dengan $k = 1, 2, 3, \dots$

Diskritisasi di titik i, j :

$$\begin{aligned} C(x, y, t) &= \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial C}{\partial t} &\approx \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} \end{aligned} \tag{6}$$

Dalam model penyebaran konsentrasi polutan gas yang berbentuk sistem dinamik, C merupakan variabel keadaan. Pendekatan beda hingga pusat akan digunakan untuk diskritisasi pada posisi x dan posisi y [7].

Diskritisasi terhadap posisi x diperoleh

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{C_{i+1,j}^k - C_{i-1,j}^k}{2\Delta x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \approx \frac{C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2} \tag{8}$$

sedangkan diskritisasi terhadap posisi y diperoleh

$$\frac{\partial C}{\partial y} \approx \frac{C_{i,j+1}^k - C_{i,j-1}^k}{2\Delta y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \approx \frac{C_{i,j+1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \tag{10}$$

C. Kestabilan dan Keterkontrolan

Persamaan linier diskrit $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ memiliki sifat-sifat diantaranya kestabilan dan keterkontrolan. Persamaan linier diskrit dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $|\lambda_i(A)| < 1$ untuk $i = 1, \dots, n$ dengan $\lambda_i(A)$ merupakan nilai eigen dari matriks A . Sedangkan dikatakan stabil jika $|\lambda_i(A)| \leq 1$ untuk $i = 1, \dots, n$ [8].

Persamaan linier diskrit $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, dikatakan terkontrol jika dan hanya jika *rank* matriks C sama dengan n [9]. Matriks C merupakan matriks keterkontrolan dengan [8]:

$$C = [A \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (11)$$

D. Kendali Optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin

Kendali yang digunakan dalam suatu sistem haruslah memenuhi beberapa hal dan pada waktu yang sama dapat ditentukan ekstrim minimum maupun maksimum yang ingin dicapai oleh sistem yang sesuai dengan fungsi tujuan. Sehingga dapat dirumuskan beberapa hal yang diperlukan dalam melakukan suatu kendali optimal, sebagai berikut [10]:

1. Model matematika dari suatu sistem yang secara umum berbentuk variabel *state*.
2. Fungsi objektif dari suatu sistem.
3. Kendala dan kondisi batas yang harus dipenuhi oleh suatu sistem.

Fungsi objektif atau *performance index* dari suatu sistem dapat dirumuskan sebagai berikut [10]:

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (12)$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (13)$$

serta kondisi batas $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, t_0 dan t_f masing-masing adalah waktu awal dan akhir.

Setelah memberikan kendali terhadap sistem, dilakukan perhitungan kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Berikut merupakan langkah-langkah yang perlu dilakukan dalam prinsip ini [10]:

1. Membentuk fungsi Pontryagin (Hamiltonian)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \quad (14)$$

2. Meminimumkan bentuk Hamiltonian terhadap vektor kendali $u(t)$ dengan cara sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (15)$$

Sehingga diperoleh kondisi stasioner sebagai berikut:

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (16)$$

3. Dengan menggunakan $u^*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian baru yang optimal dengan notasi $H^*(t)$, sebagai berikut:

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) \quad (17)$$

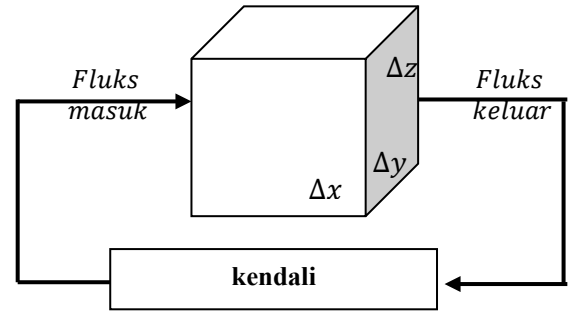
4. Mencari persamaan kedua *state* dan *costate* dengan cara sebagai berikut:

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* \quad \text{dan} \quad \dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* \quad (18)$$

dengan kondisi batas yang diberikan oleh keadaan awal (x_0) dan keadaan akhir yaitu:

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (19)$$

dengan S adalah bentuk Meyer dari fungsi tujuan J , H adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda * menunjukkan keadaan saat variabel kendalinya stasioner.



Gambar 2. Model Sistem Penyebaran Konsentrasi Polutan Gas dengan Kendala (u).

5. Mensubstitusikan hasil yang telah diperoleh pada langkah ke-4 ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah ke-2 untuk mendapatkan kendali optimalnya.

III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Pengembangan Model Konsentrasi Polutan Gas

Model penyebaran konsentrasi polutan gas pada persamaan (5) dikembangkan dengan memberikan kendali berupa penghijauan untuk konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan kendali berupa pengurangan penggunaan kendaraan pribadi untuk konsentrasi Nitrogen Dioksida (NO_2). Pada atmosfer terjadi aliran fluida seperti yang digambarkan pada Gambar 1. Fluks dari polutan akan bergerak menembus permukaan bidang dan keluar dari bidang. Pemberian kendali diasumsikan berpengaruh terhadap jumlah fluks polutan yang masuk. Model sistem penyebaran konsentrasi polutan gas dengan pemberian kendali digambarkan seperti Gambar 2.

Pada penyebaran konsentrasi polutan gas di udara berlaku hukum kekekalan massa sebagai berikut [6]:

Laju Perubahan Fluks

$$= \sum \text{Aliran fluida yang masuk} - \sum \text{Aliran fluida yang keluar}$$

Berdasarkan model sistem penyebaran konsentrasi polutan gas dengan kendali pada Gambar 2 diasumsikan bahwa fluks yang masuk adalah sebagai berikut :

$$\text{Fluks masuk} = J_x + J_y + \alpha u \quad (20)$$

J_x merupakan fluks yang masuk searah sumbu- x dengan model pada persamaan (2.4), sedangkan J_y merupakan fluks yang masuk searah sumbu- y . Dan α merupakan bobot kendali dengan kendali yang dinotasikan dengan u . Fluks keluar dari model sistem penyebaran konsentrasi polutan gas adalah sebagai berikut:

$$\text{Fluks keluar} = \left(J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left(J_y + \frac{\partial J_y}{\partial y} dy \right) dydz \quad (21)$$

$\left(J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x} dx \right) dydz$ merupakan aliran fluks yang keluar

berdasarkan teori keterkontrolan didapatkan bahwa model sistem tersebut terkontrol.

Prinsip minimum pontryagin merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan kendali optimal. Fungsi tujuan yang diberikan untuk model konsentrasi polutan gas sebagai berikut:

$$J(u) = \min \int_{t_0}^{t_f} \left(C - \frac{1}{2} \alpha u^2 \right) du \quad (26)$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} t_0 < t < t_f \\ 0 < u < 1 \\ C(t_0) = C_0 > 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Permasalahan kendali optimal yang terdapat pada penelitian ini memiliki jenis *fixed-final time and free-final state system* [10].

Berikut merupakan langkah-langkah dalam penyelesaian permasalahan kendali optimal pada persamaan (23) dengan metode prinsip minimum pontryagin [10]:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(C, u, \lambda, t) = V(C, u, t) + \lambda f(C, u, t)$$

$$H(C, u, \lambda, t) = \left[C - \frac{1}{2} \alpha u^2 \right] + \lambda \left[\begin{array}{c} \alpha u + D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \\ D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial C}{\partial x} - \\ V_y \frac{\partial C}{\partial y} \end{array} \right] \quad (28)$$

2. Menentukan kondisi stasioner dari persamaan Hamiltonian (26) untuk mendapatkan persamaan kendali optimal.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ -\alpha u + \alpha \lambda &= 0 \\ u^* &= \lambda \end{aligned} \quad (29)$$

3. Menentukan H^* yang optimal

Dengan mensubstitusikan persamaan kendali optimal yang telah diperoleh pada persamaan (langkah 2) ke dalam persamaan Hamiltonian pada langkah 1, maka diperoleh:

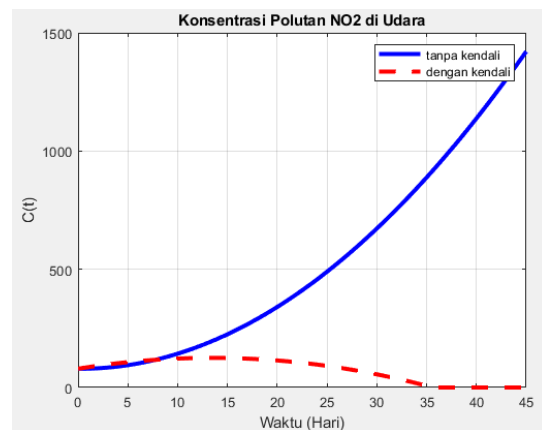
$$H^*(C, u^*, \lambda, t) = \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 + C + D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial C}{\partial x} - V_y \frac{\partial C}{\partial y} \quad (30)$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate* untuk memperoleh model yang optimal.

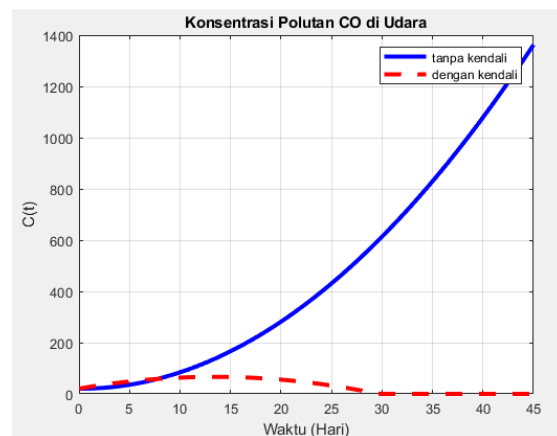
- a. Persamaan *State*

Persamaan *state* yang optimal didapatkan dengan cara menurunkan fungsi H^* yang telah diperoleh pada langkah ke-3 terhadap λ , sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{C}^*(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_* \\ \dot{C}^*(t) &= \alpha \lambda(t) \end{aligned} \quad (31)$$



Gambar 3. Grafik Konsentrasi NO_2 .



Gambar 4. Grafik Konsentrasi CO .

- b. Persamaan *Costate*

Persamaan *costate* yang optimal didapatkan dengan cara menurunkan negatif fungsi H^* yang telah diperoleh pada langkah ke-3 terhadap C , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^*(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial C} \right)_* \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -1 \end{aligned} \quad (32)$$

Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode *forward backward sweep* Runge-Kutta orde 4 dengan asumsi batas pada persamaan (27) dan asumsi nilai parameter pada tabel 1. Dalam melakukan simulasi numerik tersebut dijalankan dengan menggunakan bantuan *software* MATLAB.

Misal diberikan persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (33)$$

dengan kondisi awal $x(t) = x_0$, maka iterasi penyelesaian *forward sweep* Runge-Kutta orde 4 adalah sebagai berikut [10]:

$$k_1 = hf(t_n, x_n) \quad (34)$$

$$k_2 = hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2} \right) \quad (35)$$

$$k_3 = hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2} \right) \quad (36)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3) \quad (37)$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} \quad (38)$$

dengan h merupakan panjang interval, t_0 dan t_f adalah waktu awal dan akhir. Penyelesaian *forward sweep* Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut [10]:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (39)$$

dan iterasi penyelesaian *backward sweep* Runge-Kutta orde 4 adalah sebagai berikut [10]:

$$k_1 = hf(t_n, x_n) \quad (40)$$

$$k_2 = hf\left(t_n - \frac{h}{2}, x_n - \frac{k_1}{2}\right) \quad (41)$$

$$k_3 = hf\left(t_n - \frac{h}{2}, x_n - \frac{k_2}{2}\right) \quad (42)$$

$$k_4 = hf(t_n - h, x_n - k_3) \quad (43)$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} \quad (44)$$

dengan h merupakan panjang interval, t_0 dan t_f adalah waktu awal dan akhir. Penyelesaian *backward sweep* Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut [10]:

$$x_{n-1} = x_n - \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (45)$$

Proses simulasi dimulai dengan memberikan konsentrasi awal NO_2 atau $C(0)$ sebesar $79.3433 \mu g/m^3$. Nilai ini bersumber dari konsentrasi harian tertinggi NO_2 sepanjang tahun 2019 di Surabaya. Dengan waktu akhir (t_f) yang diberikan untuk simulasi adalah 45 hari.

Langkah selanjutnya dilakukan simulasi dengan bantuan *software* MATLAB. Hasil yang dari simulasi numerik ini dapat dilihat pada Gambar 3.

Berdasarkan Gambar 3. terlihat bahwa model dengan pemberian kendali berupa pengurangan penggunaan kendaraan pribadi mengalami penurunan konsentrasi NO_2 . Sedangkan model tanpa kendali mengalami peningkatan konsentrasi NO_2 . Dalam simulasi model tanpa kendali diperoleh konsentrasi akhir NO_2 sebesar $340.418 \mu g/m^3$ dimana konsentrasi akhir mengalami peningkatan dari konsentrasi awal. Sedangkan dalam simulasi model dengan pemberian kendali diperoleh konsentrasi akhir NO_2 sebesar $0 \mu g/m^3$.

Dengan melakukan langkah simulasi yang sama untuk konsentrasi Karbon Monoksida (CO), diberikan konsentrasi awal untuk konsentrasi CO atau $C(0)$ sebesar $20.511 \mu g/m^3$. Nilai ini bersumber dari konsentrasi harian tertinggi CO sepanjang tahun 2019 di Surabaya. Waktu akhir (t_f) yang

diberikan untuk simulasi adalah 45 hari. Diperoleh hasil dari simulasi numerik sebagai berikut:

Berdasarkan Gambar 4. terlihat bahwa model dengan pemberian kendali berupa penghijauan dan bobot kendali sebesar 0.05 mengalami penurunan konsentrasi CO . Sedangkan model tanpa kendali mengalami peningkatan konsentrasi CO . Konsentrasi akhir dari CO dengan model tanpa kendali diperoleh sebesar $281.586 \mu g/m^3$, dimana nilai ini naik dari konsentrasi awal CO sebesar $20.511 \mu g/m^3$. Sedangkan model dengan pemberian kendali berupa penghijauan memiliki konsentrasi akhir CO sebesar $0 \mu g/m^3$.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisa dan pembahasan dalam penelitian ini dapat ditarik kesimpulan yang pertama, dari hasil analisa sifat model penyebaran konsentrasi polutan dengan kendali, diperoleh sifat sistem yang stabil asimtotik dan terkontrol. Kedua, dalam upaya memperoleh model minimum optimal konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO_2) dengan menerapkan teori kendali Prinsip Minimum Pontryagin diperoleh model kendali optimal yaitu

$$u^* = \lambda$$

Berdasarkan hasil simulasi selama 45 hari, pemberian kendali berupa penghijauan menurunkan konsentrasi Karbon Monoksida (CO) sebesar 100%. Sedangkan pemberian kendali berupa pengurangan penggunaan kendaraan pribadi menurunkan konsentrasi Nitrogen Dioksida (NO_2) juga sebesar 100%.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] I. Machdar, *Pengantar Pengendalian Pencemaran: Pencemaran Air, Pencemaran Udara, dan Kebisingan*. Yogyakarta: Deepublish, 2018.
- [2] K. E. S. Manik, *Pengelolaan Lingkungan Hidup*. Jakarta: Kencana, 2016.
- [3] H. Mukono, *Aspek Kesehatan Pencemaran Udara*. Surabaya: Pusat Penerbitan dan Percetakan Unair (AUP), 2011.
- [4] A. J. Bard and F. Larry R, *Electrochemical Methods: Fundamental and Applications*, 2nd ed. United States of America: Library of Congress Cataloging in Publication Data, 2000.
- [5] S. E. Prakosa, "Estimasi Konsentrasi Karbon Monoksida (CO) dan Nitrogen Dioksida (NO₂) Menggunakan Metode Fraksional Kalman," Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2020.
- [6] N. de Nevers, *Air Pollutin Control Engineering*, 2nd ed. United States of America: Waveland Press, 1995.
- [7] C. G. Mingham and D. M. Causon, *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. Manchester Metropolitan University, 2011.
- [8] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems*, 2nd ed. University of Minnesota, 1995.
- [9] H. S. S. Wijayanti and W. Mardika, "Metode runge kutta dalam penyelesaian model radang akut," *Ekologia*, vol. 11, 2011.
- [10] R. W. H. Sargent, *Optimal Control Systems*. United States of America: CRC Press, 2000.