

# Kontrol Optimal Penyebaran Penyakit Demam Berdarah dengan Pengaruh Penyemprotan Insektisida dan Pengobatan

Sulthon Amar Al Aziim dan Didik Khusnul Arif  
 Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)  
*email: didik@matematika.its.ac.id*

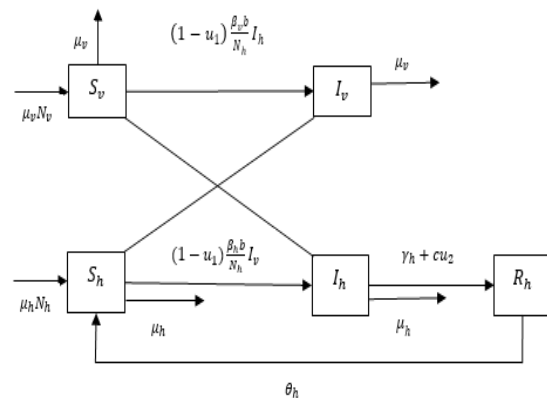
**Abstrak**—Demam berdarah adalah salah satu masalah kesehatan yang utama pada beberapa provinsi di Indonesia, salah satunya adalah provinsi Sulawesi Selatan. Penyebaran penyakit demam berdarah akan meningkat ketika musim hujan dikarenakan nyamuk *Aedes Aegypti* sebagai vektor penyebaran penyakit utamanya akan bertelur dan menetasakan telurnya pada genangan air sehingga menjadi jentik larva. Sebelumnya telah dilakukan penelitian mengenai model dan analisa penyebaran penyakit demam berdarah di Sulawesi Selatan. Sehingga dilakukan pengendalian penyebaran penyakit demam berdarah dengan pemberian kontrol berupa penyemprotan insektisida dan pengobatan dengan tujuan mengurangi populasi manusia yang terinfeksi. Pada penelitian ini dibahas mengenai model penyebaran penyakit demam berdarah dengan kontrol, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, dan analisa sifat model. Kemudian dilakukan penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Selanjutnya dilakukan penyelesaian solusi numerik dengan metode Runge Kutta orde empat dengan bantuan software MATLAB. Berdasarkan hasil analisis dan hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem stabil asimtotik pada titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan bebas penyakit, dan didapatkan menurunnya populasi manusia yang terinfeksi penyakit demam berdarah dengan adanya pemberian kontrol berupa penyemprotan insektisida dan pengobatan dengan persentase penurunan sebesar 99% selama 12 bulan.

**Kata Kunci**—Demam Berdarah, Model Matematika, Kontrol Optimal, Runge Kutta.

## I. PENDAHULUAN

INDONESIA adalah negara yang memiliki iklim tropis dan mempunyai kadar curah hujan yang tinggi. Oleh karena itu, iklim di Indonesia dapat menyebabkan berbagai penyakit tropis yang dapat disebabkan oleh nyamuk dan cukup meresahkan masyarakat, salah satunya merupakan penyakit demam berdarah. Demam berdarah adalah penyakit menular yang diakibatkan oleh virus dengue yang ditularkan melalui nyamuk *Aedes Egypti* sebagai vektor penyebaran penyakit utamanya. Penyakit ini telah menyerang lebih dari 100 negara termasuk Indonesia [1]. Penyakit demam berdarah merupakan masalah kesehatan yang serius terutama pada negara – negara beriklim tropis seperti Indonesia hal ini dikarenakan penyebaran penyakit demam berdarah dipengaruhi oleh iklim yang berakibat penyebaran penyakit demam berdarah akan meningkat ketika musim hujan.

Kasus demam berdarah di Indonesia pada tahun 2019 tercatat sebanyak 138.127 kasus. Angka ini mengalami peningkatan dibandingkan tahun 2018 sebanyak 65.602 kasus. Angka kematian akibat penyakit demam berdarah pada tahun 2019 mengalami peningkatan yang signifikan jika dibandingkan dengan tahun 2018 yaitu dari 467 menjadi 919



Gambar 1. Diagram kompartemen model penyebaran penyakit demam berdarah dengan kendali.

kematian [2]. Pada provinsi Sulawesi Selatan kasus demam berdarah pada tahun 2019 terdapat sebanyak 3625 kasus hal ini mengalami kenaikan dari tahun – tahun sebelumnya [2]. Provinsi Sulawesi Selatan merupakan daerah endemik untuk penyakit demam berdarah [3].

Mengingat tinggi nya kasus yang ada dan tingkat penyebaran yang tinggi di Sulawesi Selatan maka perlu dilakukan kontrol terhadap penyebaran penyakit demam berdarah. Memberantas nyamuk yang menjadi vektor penyebaran pemyakit demam berdarah merupakan pencegahan utama yang perlu di lakukan agar bisa mengendalikan penyebaran penyakit demam berdarah [4]. Hal ini dapat dilakukan salah satunya dengan penyemprotan insektisida atau fogging ke lingkungan rumah atau pun daerah dimana tempat berkembangnya nyamuk sehingga dapat mengurangi populasi nyamuk terutama nyamuk *Aedes Aegypti* [4]. Pengendalian penyebaran penyakit demam berdarah juga dapat dilakukan dengan memberikan pengobatan kepada pasien yang terinfeksi sehingga dapat meningkatkan populasi yang sembuh dari penyakit demam berdarah. Oleh karena itu berdasarkan permasalahan yang ada diatas, maka pada penelitian ini akan membahas mengenai kontrol optimal penyebaran penyakit demam berdarah dengan pemberian kontrol berupa penyemprotan insektisida dan pengobatan.

## II. URAIAN MATERI

### A. Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah

Model matematika ini dirumuskan pada penularan penyakit demam berdarah dalam bentuk non linier sistem persamaan diferensial biasa. Berikut ini adalah model matematika untuk penyebaran penyakit demam berdarah [3].

$$\frac{d}{dt}S_h = \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h + \theta_h R_h \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}I_h = \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}R_h = \gamma_h I_h - (\mu_h + \theta_h) R_h \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}S_v = \mu_v N_v - \frac{b\beta_v}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}I_v = \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v \quad (5)$$

**B. Titik Keseimbangan**

Umumnya pada kasus epidemiologi terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan tanpa penyakit dan titik kesetimbangan endemik. [5].

**Definisi 2.2.1** [6]:

Diberikan persamaan differensial tingkat satu  $x(t) = f(x(t))$  dengan  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  penyelesaian dengan keadaan awal  $x(0) = x_0$  dinotasikan dengan  $x(t, x_0)$ .

1. Vektor  $\bar{x}$  yang memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$  disebut suatu titik setimbang.

**C. Kestabilan**

Jika titik  $(x_*, y_*)$  merupakan titik kesetimbangan yang didapatkan dari suatu sistem persamaan differensial maka kestabilan dapat diperoleh melalui kajian titik setimbang terhadap nilai eigen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  yaitu sebagai berikut [7]:

- 1) Stabil apabila jika  $Re(\lambda_i) \leq 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$ . Jika didapatkan nilai eigen berupa bilangan kompleks dimana bagian realnya berupa  $Re(\lambda_i) \leq 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$ . Dan untuk semua  $\lambda_i$  dengan  $Re(\lambda_i) = 0$  dengan multiplisitas aljabarnya sama dengan multiplisitas geometrinya.
- 2) Stabil asimtotik apabila jika  $Re(\lambda_i) < 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$ . Jika didapatkan nilai eigen berupa bilangan kompleks dimana bagian realnya berupa  $Re(\lambda_i) < 0$  untuk semua  $i = 1, \dots, k$ .

**D. Keterkontrolan**

Keterkontrolan sistem merupakan suatu kondisi dimana sistem dapat dikontrol dari satu keadaan menjadi keadaan lainnya sesuai dengan tujuan yang diinginkan. Misalkan diberikan sistem linear kontinu

$$\dot{X} = AX + BU \quad (7)$$

Sistem linear dinamik, misalkan  $A \in \mathbb{R}^n$  dikatakan terkontrol apabila terdapat suatu matriks keterkontrolan

$$M = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B) \quad (8)$$

mempunyai rank  $n$  [8].

**E. Kontrol Optimal**

Tujuan dari kontrol optimal adalah untuk memperoleh bentuk kontrol yang dapat menyebabkan suatu sistem memenuhi beberapa konstrain fisik sehingga dapat meminimumkan usaha atau memaksimumkan manfaat sesuai dengan tujuan yang diinginkan [9]. Tahapan yang perlu dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal sebagai berikut :

1. Mendeskripsikan secara sistematis suatu model yang secara umum dalam bentuk variabel *state*.
2. Menentukan fungsi tujuan (*performance index*).
3. Menentukan kendala dan kondisi batas yang harus dipenuhi.

**F. Prinsip Minimum Pontryagin**

Berikut ini adalah langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal dengan prinsip ini [9]: Langkah 1 adalah mendapatkan fungsi Pontryaginnya (Hamiltonian)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)g(x(t), u(t), t) \quad (9)$$

Langkah 2 meminimumkan  $H$  terhadap semua variabel kontrol  $u(t)$  dengan cara :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0$$

untuk mendapatkan  $u^* = u^*(x(t), \lambda(t), t)$

Langkah 3 dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2 selanjutnya akan diperoleh fungsi Hamiltonian ( $H^*$ ) yang optimal yaitu sebagai berikut :

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

Langkah 4 mendapatkan *state* dan *costate*

$$x^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* \quad (10)$$

$$\lambda^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* \quad (11)$$

Langkah 5 mensubstitusikan hasil  $x^*(t), \lambda^*(t)$  yang telah didapat ke dalam persamaan  $u^*(t)$  pada langkah 2 sehingga dapat diperoleh kontrol optimum.

**G. Runge Kutta Orde Empat**

Metode Runge Kutta adalah suatu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal atau masalah nilai batas baik pada persamaan differensial linear ataupun persamaan differensial nonlinear [10]. Misal diberikan persamaan differensial adalah sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \quad (12)$$

Dengan titik awal  $x(t) = x_0, y(t) = y_0$  maka secara iterasi penyelesaian Runge Kutta orde empat adalah sebagai berikut [11] :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}) \quad (13)$$

dimana,

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n, y_n) \quad (14)$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (15)$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (16)$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_3, y_n + k_3) \quad (17)$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} \quad (18)$$

Tabel 1.

Nilai parameter model penyebaran penyakit demam berdarah

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$\mu_h$	0.000046	$a_1$	0.2
$\beta_h b$	0.750000	$a_2$	0.1
$\gamma_h$	0.328833	$m_1$	0.3
$\mu_v$	0.032300	$m_2$	0.3
$c$	0.5	$\beta_v b$	0.375000
$\alpha$	0.25	$\theta_h$	0.575000

Tabel 2.

Jumlah populasi manusia yang terinfeksi

	Populasi Manusia Terinfeksi	Persentase Penurunan
Tanpa kontrol	157700	
Dengan kontrol	1583	99%

$u_1, u_2$



Gambar 2. Grafik perubahan perbandingan populasi manusia rentan sebelum dan sesudah diberikan kendali.

dimana  $h$  adalah panjang interval,  $t_0$  dan  $t_f$  adalah waktu awal dan akhir.

### III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

#### A. Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah dengan Kontrol

Model kontrol optimal untuk penyebaran penyakit demam berdarah dengan kontrol berupa pengobatan individu, dan penyemprotan insektisida dapat digambarkan dengan kompartemen model penyebaran penyakit demam berdarah tertera pada Gambar 1.

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 1, model matematika penyebaran penyakit demam berdarah dengan kontrol dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

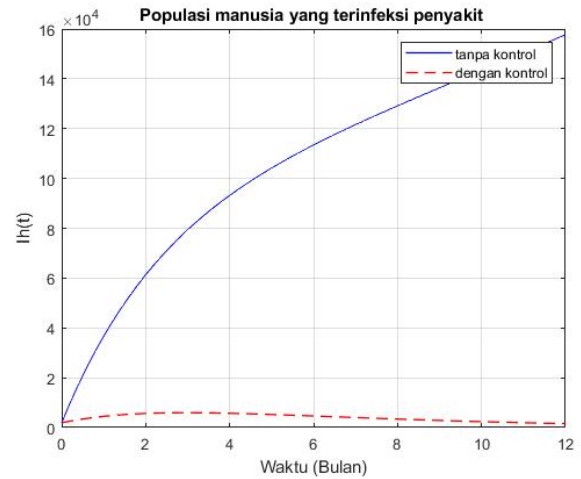
$$\frac{d}{dt} S_h = \mu_h N_h - (1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h + \theta_h R_h \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} I_h = (1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h I_h - \gamma_h I_h - c u_2 I_h \quad (20)$$

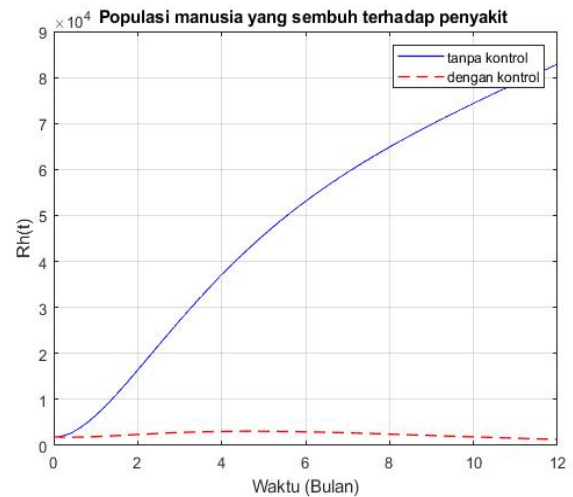
$$\frac{d}{dt} R_h = \gamma_h I_h + c u_2 I_h - \mu_h R_h + \theta_h R_h \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} S_v = \mu_v N_v - (1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v - \alpha u_1 S_v \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} I_v = (1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v - \alpha u_1 I_v \quad (23)$$



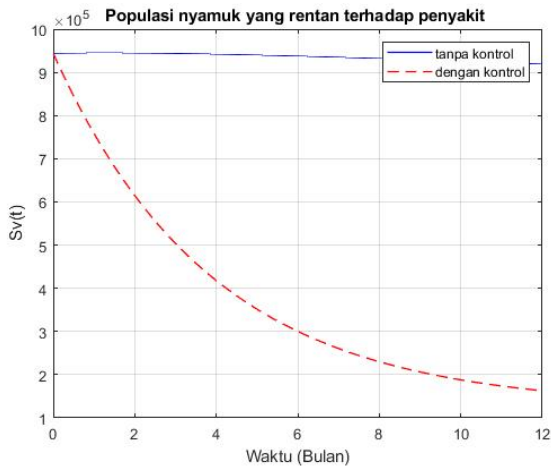
Gambar 3. Grafik perubahan perbandingan populasi manusia terinfeksi sebelum dan sesudah diberikan kendali.



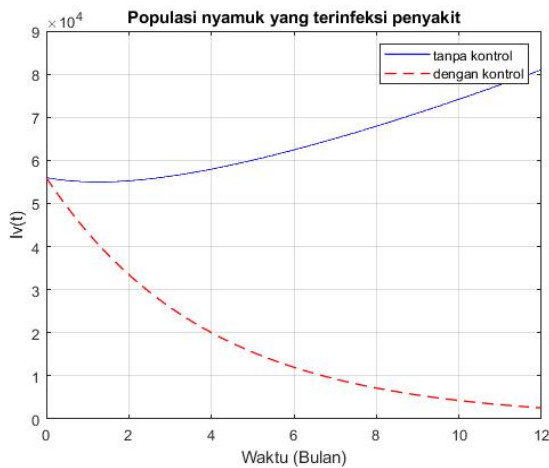
Gambar 4. Grafik perubahan perbandingan populasi manusia sembuh sebelum dan sesudah diberikan kendali.

dimana,

- $S_h$  : Jumlah manusia yang rentan terhadap penyakit
- $I_h$  : Jumlah manusia yang terinfeksi demam berdarah
- $R_h$  : Jumlah manusia yang sembuh dari demam berdarah
- $N_h$  : Populasi dari manusia
- $S_v$  : Jumlah nyamuk yang rentan terhadap penyakit
- $I_v$  : Jumlah nyamuk yang terinfeksi terhadap penyakit
- $N_v$  : P opulasi dari nyamuk
- $\mu_h$  : Rate kematian dari manusia
- $b$  : jumlah rata-rata gigitan per nyamuk yang terinfeksi
- $\gamma_h$  : Rate kesembuhan dari manusia
- $\mu_v$  : Rate kematian dari nyamuk
- $A$  : Tingkat perekrutan nyamuk
- $\theta_h$  : Laju penurunan kekebalan manusia terhadap penyakit
- $c$  : Rate manusia sembuh karena pengobatan
- $\alpha$  : Rate insektisida
- $u_1$  : Kontrol berupa penyemprotan insektisida
- $u_2$  : Kontrol berupa pengobatan terhadap manusia yang terinfeksi
- $\beta_h$  : Probabilitas penyebaran penyakit dari nyamuk ke manusia
- $\beta_v$  : Probabilitas penyebaran penyakit dari manusia ke nyamuk



Gambar 5. Grafik perubahan perbandingan populasi nyamuk rentan sebelum dan sesudah diberikan kendali.



Gambar 6. Grafik perubahan perbandingan populasi nyamuk terinfeksi sebelum dan sesudah diberikan kendali.

**B. Analisa Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit dan Endemik**

Untuk menganalisa kestabilan maka akan dicari titik kesetimbangan dari model penyebaran penyakit demam berdarah. Sehingga didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $E_0(S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*) = (N_h, 0, 0, \frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \alpha u_1}, 0)$  dan titik kesetimbangan endemik yaitu  $E_1(S_h^{**}, I_h^{**}, R_h^{**}, S_v^{**}, I_v^{**})$ . Selanjutnya dilakukan pelinieran terhadap persamaan (19) – (23). Selanjutnya dilakukan analisa kestabilan dengan mencari nilai eigen pada sekitar titik kesetimbangan. Dan didapatkan bahwa sistem stabil asimtotik terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

**C. Keterkontrolan**

Dari persamaan (19) – (23) jika  $S_h = x_1$ ,  $I_h = x_2$ ,  $R_h = x_3$ ,  $S_v = x_4$ , dan  $I_v = x_5$  maka didapatkan state space sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c \\ 0 & c \\ -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

dimana,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} I_v - \mu_h & a_{13} &= \theta_h \\ a_{15} &= -(1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} S_h & a_{22} &= (1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} I_v \\ a_{22} &= -\mu_h - \gamma_h & a_{25} &= (1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} S_h \\ a_{32} &= \gamma_h & a_{33} &= -\mu_h - \theta_h \\ a_{42} &= -(1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} S_v & a_{52} &= (1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} S_v \\ a_{44} &= -(1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} I_h - \mu_v & a_{54} &= (1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} I_h \\ a_{55} &= -\mu_v \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan matriks keterkontrolan, yaitu

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad A^4B] \tag{24}$$

Dikarenakan matriks  $M_c$  memiliki rank yang sama dengan matriks  $A$  sehingga sistem dikatakan terkontrol.

**D. Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal**

Penyelesaian kontrol optimal dapat diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dengan langkah – langkah sebagai berikut :

**1) Membentuk fungsi Hamiltonian**

$$\begin{aligned} H &= a_1 I_h + a_2 I_v + \left( \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \right) + \lambda_{S_h} (\mu_h N_h - (1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h + \theta_h R_h) + \lambda_{I_h} \left( (1 - u_1) \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h - \mu_h I_h - \gamma_h I_h - c u_2 I_h \right) + \lambda_{R_h} (\gamma_h I_h + c u_2 I_h - (\mu_h + \theta_h) R_h) + \lambda_{S_v} (\mu_v N_v - (1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v - \alpha u_1 S_v) + \lambda_{I_v} \left( (1 - u_1) \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v - \alpha u_1 I_v \right) \end{aligned} \tag{25}$$

**2) Menentukan kondisi stasioner dari persamaan (25)**

Untuk mendapatkan persamaan kontrol optimal.  $H$  diturunkan terhadap  $u_1, u_2$  sehingga didapatkan :

$$u_1^* = \frac{(\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) \frac{\beta_h b}{N_h} I_v S_h + (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{\beta_v b}{N_h} I_h S_v + (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \alpha S_v}{m_1}$$

$$u_2^* = \frac{c I_h (\lambda_{I_h} - \lambda_{R_h})}{m_2}$$

**3) Menentukan H yang optimal**

Persamaan kontrol optimal yang diperoleh pada persamaan  $u_1^*, u_2^*$  disubstitusikan ke dalam persamaan  $H$ , jadi diperoleh

$$H^* = a_1 I_h + a_2 I_v + \left( \frac{m_1 (u_1^*)^2}{2} + \frac{m_2 (u_2^*)^2}{2} \right) + \lambda_{S_h} (\mu_h N_h - (1 - u_1^*) \frac{\beta_{h^b}}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h + \theta_h R_h) + \lambda_{I_h} \left( (1 - u_1^*) \frac{\beta_{h^b}}{N_h} I_v S_h - \mu_h I_h - \gamma_h I_h - c u_2^* I_h \right) + \lambda_{R_h} (\gamma_h I_h + c u_2^* I_h - (\mu_h + \theta_h) R_h) + \lambda_{S_v} (\mu_v N_v - (1 - u_1^*) \frac{\beta_{v^b}}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v - \alpha u_1^* S_v) + \lambda_{I_v} \left( (1 - u_1^*) \frac{\beta_{v^b}}{N_h} I_h S_v - \mu_v I_v - \alpha u_1^* I_v \right)$$

4) Menyelesaikan persamaan state dan co state untuk memperoleh sistem yang optimal

1) Persamaan state

$$S_h^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{S_h}} = \mu_h N_h - (1 - u_1^*) \frac{\beta_{h^b}}{N_h} I_v S_h - \mu_h S_h + \theta_h R_h$$

$$I_h^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_h}} = (1 - u_1^*) \frac{\beta_{h^b}}{N_h} I_v S_h - \mu_h I_h - \gamma_h I_h - c u_2^* I_h$$

$$R_h^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{R_h}} = \gamma_h I_h + c u_2^* I_h - (\mu_h + \theta_h) R_h$$

$$S_v^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{S_v}} = \mu_v N_v - (1 - u_1^*) \frac{\beta_{v^b}}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v - \alpha u_1^* S_v$$

$$I_v^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_{I_v}} = \mu_v N_v - (1 - u_1^*) \frac{\beta_{v^b}}{N_h} I_h S_v - \mu_v S_v - \alpha u_1^* S_v$$

2) Persamaan Costate

$$\lambda_{S_h}^* = (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) u_1^* \frac{\beta_{h^b}}{N_h} I_v + (\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h}) u_1^* \frac{\beta_{h^b}}{N_h} I_v + \lambda_{S_h} \mu_h$$

$$\lambda_{I_h}^* = -a_1 + \lambda_{I_h} \mu_h + (\lambda_{I_h} - \lambda_{R_h}) (\gamma_h + c u_2^*) + (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{\beta_{h^b}}{N_h} S_v + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) u_1^* \frac{\beta_{h^b}}{N_h} S_v$$

$$\lambda_{R_h}^* = (\lambda_{R_h} - \lambda_{S_h}) \theta_h + \lambda_{R_h} \mu_h$$

$$\lambda_{S_v}^* = (\lambda_{S_v} - \lambda_{I_v}) \frac{\beta_{v^b}}{N_h} I_h + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) u_1^* \frac{\beta_{v^b}}{N_h} I_h + \lambda_{S_v} \mu_v + \lambda_{S_v} \alpha u_1^*$$

$$\lambda_{I_v}^* = -a_2 + (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) \frac{\beta_{h^b}}{N_h} S_h + (\lambda_{S_h} - \lambda_{I_h}) u_1^* \frac{\beta_{h^b}}{N_h} S_h + \lambda_{I_v} \mu_v + \lambda_{I_v} \alpha u_1^*$$

### E. Hasil dan Analisis Grafik Simulasi

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan parameter dari model penyebaran penyakit demam berdarah dan akan diselesaikan dengan metode Runge Kutta Orde 4 dengan bantuan *software* Matlab Berikut ini merupakan parameter yang digunakan dalam simulasi yang ditunjukkan pada Tabel 1 dengan nilai awal yaitu :

$$S_h(0) = 8.768.197$$

$$I_h(0) = 1895$$

$$R_h(0) = 1878$$

$$S_v(0) = 944000$$

$$I_v(0) = 56000$$

Pada penelitian ini akan dibandingkan hasil simulasi numerik tanpa kontrol dan dengan kontrol dalam waktu akhir

adalah 30 hari. Berikut ini merupakan hasil perbandingan simulasi numerik penyebaran penyakit demam berdarah tanpa kontrol dan dengan kontrol yang didapatkan :

#### 1) Manusia Susceptible ( $S_h$ )

Pada Gambar 2 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan manusia yang rentan sebelum dan sesudah diberikan kontrol dimana setelah diberikan kontrol maka populasi manusia yang rentan akan meningkat yang menunjukkan bahwa terjadi penurunan manusia yang akan terinfeksi.

#### 2) Manusia Infected ( $I_h$ )

Pada Gambar 3 terlihat bahwa setelah diberikan kontrol terlihat bahwa populasi manusia yang terinfeksi mengalami penurunan yang signifikan dikarenakan adanya pemberian kontrol berupa pengobatan.

#### 3) Manusia Recovered ( $R_h$ )

Pada Gambar 4 terlihat perbedaan manusia yang sembuh sebelum dan diberikan kontrol dimana setelah diberikan kontrol maka populasi manusia yang sembuh juga akan menurun dikarenakan adanya penurunan terhadap populasi manusia yang terinfeksi.

#### 4) Nyamuk Susceptible ( $S_v$ )

Populasi nyamuk yang rentan terhadap penyakit dengan Gambar 5 terlihat perbedaan sebelum dan sesudah diberikan kontrol. Setelah diberikan kontrol, populasi nyamuk yang rentan terhadap penyakit akan mengalami penurunan yang drastis dikarenakan adanya pemberian kontrol berupa penyemprotan insektisida.

#### 5) Nyamuk Infected ( $I_v$ )

Pada Gambar 6 terlihat perbedaan pada populasi nyamuk yang terinfeksi sebelum dan sesudah diberikan kontrol. Populasi nyamuk yang terinfeksi mengalami penurunan setelah diberi kontrol. Sedangkan sebelum diberikan kontrol, populasi nyamuk yang terinfeksi penyakit akan mengalami peningkatan. Sehingga berdasarkan hasil simulasi didapatkan jumlah populasi manusia yang terinfeksi penyakit demam berdarah di bulan ke-12 seperti pada Tabel 2.

## IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa berdasarkan analisa kestabilan, didapatkan bahwa sistem bersifat stabil asimtotik terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik Dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin, maka didapatkan kontrol optimal berupa  $u_1$  yang merupakan penyemprotan insektisida, dan  $u_2$  yang merupakan pengobatan individu manusia yang terinfeksi akan optimal jika nilai

$$u_1^* = \frac{(\lambda_{I_h} - \lambda_{S_h}) \frac{\beta_{h^b}}{N_h} I_v S_h + (\lambda_{I_v} - \lambda_{S_v}) \frac{\beta_{v^b}}{N_h} I_h S_v + (\lambda_{S_v} + \lambda_{I_v}) \alpha S_v}{m_1}$$

$$u_2^* = \frac{c I_h (\lambda_{I_h} - \lambda_{R_h})}{m_2}$$

Dan berdasarkan hasil simulasi, dengan adanya pemberian kontrol berupa penyemprotan insketisida dan pengobatan dapat menurunkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit demam berdarah dengan persentase penurunan sebesar 99% dengan waktu pengamatan selama 12 bulan. Sehingga dengan

pemberian kontrol optimal berupa pengobatan, selain dapat meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi demam berdarah, pengeluaran biaya yang dibutuhkan juga dapat diminimalkan.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] H. Purwanto, E. Noviani, and M. N. Mara, "Analisis dan simulasi model matematika penyakit demam dengue dengan satu serotif virus dengue," *BIMASTER*, vol. 3, no. 3, 2014.
- [2] Kemenkes RI, *Profil Kesehatan Indonesia Tahun 2019*. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI, 2019.
- [3] W. Sanusi, N. Badwi, A. Zaki, S. Sidjara, and N. Sari, "Analysis and simulation of SIRS model for dengue fever transmission in South Sulawesi, Indonesia," *J. Appl. Math.*, 2021, <https://doi.org/10.1155/2021/2918080>.
- [4] A. Bustamam, D. Aldila, and A. Yuwanda, "Understanding dengue control for short- and long-term intervention with a mathematical model approach," *J. Appl. Math.*, 2018.
- [5] A. Puspitasari, K. Kamiran, and N. Asiyah, "Analisis kestabilan dan kontrol optimal model penyebaran tuberkulosis (TB) dengan terapi dan vaksinasi menggunakan metode runge kutta," *J. Sains dan Seni ITS*, vol. 8, no. 2, pp. A58--A64, 2020.
- [6] Subiono, *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya: ITS Press, 2016.
- [7] J. W. Polderman and J. C. Willems, *Introduction to the Mathematical Theory of Systems and Control*. New York: IITB, 1998.
- [8] S. Sakirman, T. Bakhtiar, and A. Kusnanto, "Identifikasi kondisi keterkontrolan beberapa sistem pendulum," *J. Math. Its Appl.*, vol. 13, no. 2, pp. 63--71, 2014.
- [9] D. S. Naidu, *Optimal Control System*. New Jersey: Crc Press, 2002.
- [10] H. Wijayanti, S. Setyaningsih, and M. Wati, "Metode runge kutta dalam penyelesaian model radang akut," *Ekologia*, vol. 11, no. 2, pp. 46--52, 2017.
- [11] D. V. Griffiths and I. M. Smith, *Numerical Methods for Engineers*. New Jersey: Crc Press, 2006.