Pemodelan dan Simulasi Peluang Kerugian dengan Persamaan Integro-diferensial pada Program Jaminan Kematian PT ASABRI (Persero)

Yerahmeel Dwiyawara dan Basuki Widodo
Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
e-mail: b_widodo@matematika.its.ac.id

***Abstrak*—Kebangkrutan pada suatu perusahaan asuransi secara teori dapat dihitung probabilitasnya menggunakan pendekatan statistik dengan konsep *ruin probability*. Peluang kebangkrutan merupakan peluang terjadinya kebangkrutan pertama kali pada perusahaan asuransi. Hal ini ditandai dengan fungsi surplusnya bernilai negatif atau yang berarti perusahaan sudah tidak dapat menanggung beban klaim pada periode berikutnya. Konsep ini dapat digunakan bukan hanya untuk menghitung kebangkrutan secara utuh, namun dapat digunakan pula untuk menghitung kerugian suatu program asuransi pada waktu tertentu. Dengan memandang banyaknya klaim yang terjadi pada periode waktu tertentu sebagai suatu data berdistribusi peubah acak, dapat ditentukan nilai peluang kerugian dengan model yang dikembangkan menggunakan persamaan integro-diferensial. Menghitung probabilitas kerugian dapat menjadi acuan untuk mengetahui risiko yang mungkin dihadapi oleh perusahaan di masa mendatang. Model peluang kerugian Program Jaminan Kematian PT ASABRI (Persero) berdasarkan dengan data akumulasi klaim tahun 2019 yang berdistribusi Normal adalah sebagai berikut: $\psi(u) = 1 - 141,1129e^{m_1 u} + 140,2372e^{m_2 u}$. Hasil simulasi peluang kerugian menunjukkan bahwa semakin besar nilai surplus, maka peluang kerugian semakin kecil.**

***Kata Kunci*—Asuransi, Distribusi Normal, Kerugian Perusahaan, Peluang Kebangkrutan, Persamaan Integro-diferensial.**

I. PENDAHULUAN

BERDASARKAN Undang-Undang Nomor 40 Tahun 2004 tentang Perasuransian, disebutkan bahwa asuransi adalah perjanjian antara dua pihak, yaitu perusahaan asuransi dan pemegang polis, yang menjadi dasar bagi penerimaan premi oleh perusahaan asuransi sebagai imbalannya [1]. Kebangkrutan perusahaan asuransi pada dasarnya dapat dihitung menggunakan pendekatan statistika, yakni peluang kebangkrutan atau *ruin probability*. Peluang kebangkrutan merupakan peluang terjadinya kondisi bangkrut untuk pertama kali pada perusahaan asuransi [2]. Hal ini ditandai dengan fungsi surplusnya bernilai negatif atau yang berarti perusahaan sudah tidak dapat menanggung beban klaim pada periode berikutnya. Secara teori, pendekatan *ruin probability* ini dapat digunakan untuk meninjau kerugian perusahaan asuransi pada salah satu atau beberapa manfaat program yang diberikan kepada peserta asuransi. Berdasarkan Peraturan Pemerintah Nomor 102 Tahun 2015, PT Asuransi Sosial Angkatan Bersenjata Republik Indonesia (Persero) atau PT ASABRI (Persero) bertugas mengelola program Asuransi Sosial Prajurit TNI, Anggota Polri, dan PNS di Lingkungan Kementerian Pertahanan dan Kepolisian Negara Republik Indonesia. PT ASABRI (Persero) selaku perusahaan yang mengelola manfaat asuransi harus memenuhi persyaratan tingkat kesehatan keuangan perusahaan sesuai standar Peraturan Otoritas Jasa Keuangan (POJK) Nomor 71 Tahun 2016, yaitu tingkat solvabilitas, cadangan teknis, kecukupan investasi, ekuitas, dana jaminan, dan ketentuan lain yang berhubungan dengan kesehatan keuangan [3]. Penelitian ini menganalisa salah satu program yang ada di PT ASABRI (Persero), yakni Jaminan Kematian (JKm). Melalui model dan simulasi peluang kerugian dapat diperoleh probabilitas program JKm memberikan kerugian bagi keuangan perusahaan. Perhitungan peluang kerugian ini dapat memberikan informasi tentang risiko yang dimiliki perusahaan dalam situasi yang sedang dialami di masa sekarang dan risiko yang mungkin terjadi di masa mendatang. Dengan demikian, perusahaan dapat mengambil kebijakan untuk mengurangi risiko yang cukup besar. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menentukan model peluang kerugian dari perusahaan asuransi adalah dengan menggunakan persamaan integro-diferensial.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Penelitian Terdahulu

Penelitian ini merujuk pada beberapa jurnal penelitian yang telah ada sebelumnya. Pada tahun 2017, penelitian yang berjudul "*Pemodelan dan Simulasi Untuk Mengetahui Kebangkrutan Perusahaan Asuransi Berdasarkan Ukuran Klaim*" oleh Nanda Putri Mintari menghasilkan suatu model dan simulasi pada klaim keberapa kebangkrutan pertama kali terjadi pada perusahaan asuransi dengan frekuensi klaim berdistribusi Poisson dan ukuran klaim berdistribusi Eksponensial. Hasil penelitian ini menyimpulkan bahwa semakin besar premi yang diterima perusahaan, maka semakin lama perusahaan dapat bertahan karena semakin kecil peluang kebangkrutannya [4]. Namun, hal ini berdampak pada jumlah pelanggan asuransi menjadi semakin berkurang oleh karena semakin besar premi yang harus dibayarkan.

Penelitian ini juga merujuk pada jurnal penelitian yang disusun oleh Inayatul Qudsiyah, dkk. pada tahun 2013 yang berjudul "*Menentukan Model Peluang Kebangkrutan Perusahaan Asuransi dengan Persamaan Integro-diferensial*". Penelitian tersebut berisi tentang model risiko dalam asuransi dan membahas mengenai hasil peluang kebangkrutan dalam waktu yang tidak terbatas. Akumulasi klaim pada penelitian tersebut diasumsikan berdistribusi kombinasi linier dari dua distribusi Eksponensial. Model peluang kebangkrutan pada proses surplus yang mengikuti proses Poisson majemuk dengan persamaan integro-diferensial yang berhasil ditentukan oleh Inayatul Qudsiyah, dkk. adalah sebagai berikut[5]

$$\psi(u) = -\frac{A_1}{p_1}e^{p_1 u} - \frac{A_2}{p_2}e^{p_2 u}, \quad u \geq 0$$

B. Asuransi

Berdasarkan Undang-Undang Nomor 40 Tahun 2004 tentang Perasuransian, disebutkan bahwa asuransi adalah perjanjian antara dua pihak, yaitu perusahaan asuransi dan pemegang polis. Usaha asuransi dapat dikelompokkan menjadi usaha asuransi umum dan usaha asuransi jiwa. Usaha asuransi jiwa adalah usaha yang menyelenggarakan jasa penanggulangan risiko yang memberikan pembayaran kepada pemegang polis, tertanggung, atau pihak lain yang berhak dalam hal tertanggung meninggal dunia atau tetap hidup.

Peserta asuransi atau pihak tertanggung berkewajiban untuk membayarkan sejumlah uang yang disebut dengan premi. Premi merupakan iuran yang harus dibayarkan kepada perusahaan asuransi sesuai dengan polis yang berlaku berdasarkan kesepakatan bersama antara perusahaan dan peserta asuransi. Sementara itu, peserta asuransi memiliki hak atas klaim apabila di kemudian hari, risiko yang tertuang dalam polis terjadi.

C. Program Jaminan Kematian (JKm) PT ASABRI (Persero)

Program JKm diberikan kepada peserta asuransi yang masih aktif dan berhenti apabila peserta diberhentikan dari dinas tempat peserta bekerja. Iuran Program JKm atau premi yang dibayarkan adalah sebesar 0,67% dari gaji peserta per bulan. Premi ini ditanggung oleh Pemberi Kerja.

Hak atas klaim yang dapat diajukan peserta merupakan manfaat dari program JKm, yang meliputi:

1) Santunan Risiko Kematian

Manfaat santunan risiko kematian diberikan kepada ahli waris peserta yang meninggal dunia biasa dalam status dinas aktif.

a. Santunan Kematian Sekaligus

   Perwira TNI dan Polri, dan PNS Golongan III – IV sebesar Rp 17.000.000,00, bintara dan tamtama TNI dan Polri, PNS Golongan I – II sebesar Rp 15.500.000.

b. Uang Duka Wafat

   Diberikan kepada ahli waris peserta aktif sebesar tiga kali dari gaji terakhir peserta.

c. Biaya Pemakaman

   Diberikan kepada ahli waris peserta aktif sebesar Rp 10.000.000,00.

2) Bantuan Beasiswa

Diberikan sekaligus sebesar Rp 15.000.000,00 untuk satu orang anak peserta dengan ketentuan yang telah diatur dalam PP 102 Tahun 2015.

D. Uji Kolmogorov-Smirnov

Salah satu metode untuk menguji distribusi dari suatu data adalah metode uji Kolmogorov-Smirnov. Pengujian dilakukan dengan membandingkan fungsi distribusi kumulatif $F_s(x)$ dengan fungsi kumulatif empiris $F_n(x)$ untuk menilai kecocokan yang didefinisikan sebagai [6].

$$F_n(x) = \frac{f(x)}{n}$$

dengan n merupakan ukuran atau banyaknya sampel dan $f(x)$ adalah jumlah X_i kurang dari atau sama dengan x.

Hipotesa pada uji Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut:

Hipotesa:

H_0 : Data berdistribusi umum

H_1 : Data tidak berdistribusi umum

Statistik uji Kolmogorov-Smirnov untuk fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ didefinisikan [6].

$$D_n = sup|F_s(x) - F_n(x)|$$

Hipotesa H_0 diterima jika nilai statistik uji (D_n) lebih kecil dari nilai kritis yang diperoleh dari Tabel 1 sesuai dengan ukuran sampel n.

E. Distribusi Normal

Suatu peubah acak X berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 memiliki bentuk fungsi kepadatan peluang sebagai berikut [7].

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

Distribusi normal standar adalah distribusi normal dengan mean $\mu = 0$ dan variansi $\sigma^2 = 1$. Bentuk peubah acak distribusi normal standar dinyatakan dengan bentuk transformasi.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

F. Fungsi Surplus

Misalkan $U(t)$ surplus pada waktu ke-t, u menyatakan modal awal atau modal pada waktu ke-t-1, lalu c menyatakan premi yang diterima oleh perusahan asuransi, serta $S(t)$ menyatakan agregat atau akumulasi klaim yang dibayarkan perusahaan sampai pada waktu ke- t, maka fungsi surplus didefinisikan sebagai [8].

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0.$$

Model fungsi surplus serupa juga disajikan oleh Ali Deven Sezer (2010). Pendekatan model yang dilakukan oleh Ali Deven Sezer hanya terdapat perbedaan pada penamaan variabel yang ada. Berikut pendekatan model yang disajikan oleh Ali Deven Sezer [9].

$$S_t = S_0 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

dengan S_t merupakan dana perusahaan pada waktu ke-t, S_0 merupakan initial surplus, dan X_i merupakan ukuran klaim ke-i.

G. Ruin Probability

Nilai pada fungsi surplus dapat bernilai positif, nol, maupun negatif. Apabila surplus bernilai negatif untuk pertama kalinya pada saat tertentu, maka dikatakan

Tabel 1.
Perhitungan Uji Kolmogorov-Smirnov Distribusi Akumulasi Klaim

No	x	$F_s(x)$	$F_n(x)$	D
1.	6.862.239.900	0,0833	0,0089	0,07443
2.	9.580.921.500	0,1667	0,1314	0,035267
3.	10.861.031.700	0,25	0,2981	0,0481
4.	11.627.961.060	0,3333	0,4286	0,095267
5.	11.859.343.500	0,4167	0,4721	0,05543
6.	11.993.943.300	0,5	0,496	0,004
7.	12.464.064.300	0,5833	0,5832	0,00013
8.	12.675.384.900	0,6667	0,6217	0,044967
9.	13.361.985.300	0,75	0,7324	0,0176
10.	14.124.668.400	0,8333	0,834	0,00067
11.	14.288.950.500	0,9167	0,8531	0,063567
12	14.448.978.900	1	0,8686	0,1314

Tabel 2.
Perhitungan Uji Kolmogorov-Smirnov Distribusi Frekuensi Klaim

No	x	$F_s(x)$	$F_n(x)$	D
1.	146	0,08333	3.8794×10^{-14}	0,08333
2.	204	0,16667	0,000381	0,166286
3.	238	0,25	0,12769	0,12232
4.	250	0,33333	0,35337	0,02004
5.	253	0,416667	0,42549	0,008832
6.	258	0,5	0,54954	0,049535
7.	262	0,58333	0,64539	0,062056
8.	267	0,66667	0,75227	0,085605
9.	286	0,75	0,96695	0,21695
10.	303	0,83333	0,99782	0,164484
11.	304	0,916667	0,99819	0,081523
12	309	1	0,99932	0,00068

perusahaan telah mengalami kebangkrutan. Misalkan diberikan $U(t)$ adalah fungsi surplus, maka

$$T = \min\{t \text{ dan } U(t) < 0; \quad t \geq 0\}$$

menyatakan saat bangkrut dengan T bernilai tak hingga jika $U(t) \geq 0, \forall t \geq 0$. Peluang terjadinya bangkrut, jika dana awal u, didefinisikan

$$\psi(u) = P(T < \infty).$$

H. Persamaan Integro-diferensial

Persamaan integro-diferensial merupakan suatu persamaan yang melibatkan turunan dan integral pada fungsi. Persamaan integro-diferensial diberikan dalam bentuk [10].

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) + \int_{t_0}^{t} K\big(t, s, x(s)\big) ds, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.8)$$

dimana $t_0 \geq 0$ dan $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Peluang bertahan pada waktu yang berhingga didefinsikan sebagai

$$\phi(u,t) = P(U_s \geq 0, 0 \leq s \leq t \quad | \; U_0 = u)$$

Fungsi peluang bertahan $\phi(u,t)$ didefiniskan sebagai persamaan integro-diferensial parsial yang memenuhi [11].

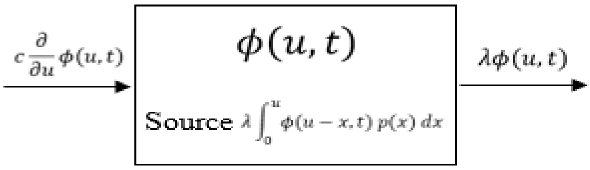
$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(u,t) = c\frac{\partial}{\partial u}\phi(u,t) - \lambda\phi(u,t) + \lambda \int_0^u \phi(u-x,t)p(x)dx$$

Normal [#43]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	12 0.1798 0.77074 20				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905
Reject?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size Statistic Rank	12 0.4162 13				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	No	No	No	No	No

Gambar 1. *Goodness of fit* distribusi akumulasi klaim dengan *easy fit 5.5 trial version.*

Poisson [#5]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	12 0.3003 0.1865 3				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905
Reject?	Yes	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size Statistic Rank	12 7.1988 4				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes

Gambar 2. *Goodness of fit* distribusi frekuensi klaim dengan *easy fit 5.5 trial version.*



Gambar 3. Skema model kontinu.

III. METODE PENELITIAN

A. Studi Literatur

Pada bagian ini dilakukan studi literatur tentang hal-hal yang berkaitan dengan penelitian ini. Di antaranya mengenai penelitian terdahulu yang berkaitan dengan model peluang kebangkrutan perusahaan asuransi, regulasi yang mengatur Program Jaminan Kematian (JKm) PT ASABRI (Persero), serta persamaan integro-diferensial sebagai persamaan yang digunakan sebagai dasar model peluang kerugian. Studi lebih mendalam mengenai hal-hal tersebut diperoleh melalui buku, jurnal ilmiah, *website* resmi PT ASABRI (Persero), serta Peraturan Pemerintah 102 Tahun 2015.

B. Analisis Data

Setelah memiliki data sebagai dasar penelitian, kemudian dilakukan analisis data yang diterima dari PT ASABRI (Persero). Terlebih dahulu data yang diperoleh akan dianalisa dan ditentukan bentuk distribusi peubah acaknya dengan uji distribusi. Data premi dan klaim yang ada pada tahun 2019 juga akan dianalisa nilai surplusnya berdasarkan data di setiap bulannya.

C. Model Peluang Kerugian dengan Persamaan Integro-diferensial

Berdasarkan bentuk distribusi yang diperoleh lewat analisa data akan dikembangkan menjadi suatu model peluang untuk menghitung peluang kerugian pada program JKm dengan persamaan integro-diferensial sehingga didapatkan persamaan yang efektif untuk menemukan peluang kerugian dengan surplus u.

Gambar 4. Simulasi peluang kerugian program JKm tahun 2019.

D. Simulasi Model Peluang Kerugian

Model peluang kerugian yang telah diperoleh disimulasikan dengan menggunakan data surplus u pada setiap bulannya di tahun 2019. Hasil simulasi ini juga dinyatakan dalam bentuk grafik untuk melihat pengaruh u pada nilai peluang kerugiannya.

E. Analisa Hasil

Dilakukan analisa pada peluang kerugian yang terjadi berdasarkan data di Januari 2019-Desember 2019 lewat model peluang kerugian yang diperoleh dan hasil simulasi dari model peluang kerugian tersebut.

IV. ANALISA DAN PEMBAHASAN

A. Uji Distribusi Data Akumulasi Klaim Program JKm

Uji distribusi data klaim dilakukan secara manual dengan metode uji Kolmogorv-Smirnov dan dilakukan juga dengan menggunakan *software Easyfit 5.5 Trial Version* untuk memvalidasi perhitungan. Pengujian distribusi ini dilakukan dengan menggunakan nilai signifikansi $\alpha = 0{,}01$.

Berdasarkan data akumulasi jumlah klaim keseluruhan dari Program Jaminan Kematian (JKm) pada periode Januari 2019-Desember 2019, dilakukan perhitungan secara manual menggunakan metode Kolmogorov-Smirnov dengan $\mu = 12.012.000.000$ dan $\sigma = 2.173.800.000$.

Berdasarkan Uji Hipotesis Kolmogorov-Smirnov dengan hipotesa:

H_0: Data berdistribusi Normal

H_1 : Data tidak berdistribusi Normal

Statistik Uji Kolmogorov-Smirnov untuk fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} D_n &= sup|F_s(x) - F_n(x)| \\ D_n &= sup|D| \\ &= 0{,}1314 \end{aligned}$$

Berdasarkan Tabel 1 dengan $N = 12$ dan nilai signifikansi $\alpha = 0{,}01$, didapatkan $D_{N,\alpha} = 0{,}44905$. Karena $D_n < D_{N,\alpha}$ maka H_0 diterima, sehingga data akumulasi klaim Program Jaminan Kematian (JKm) pada periode Januari 2019-Desember 2019 terbukti berdistribusi Normal.

Kemudian dilakukan pengujian dengan menggunakan *Easyfit 5.5 Trial Version* untuk memvalidasi perhitungan dan diperoleh data berdistribusi Normal untuk nilai signifikansi $\alpha = 0{,}01$. Hasil uji distribusi dengan *Easyfit 5.5 Trial Version* tertera pada Gambar 1 untuk akumulasi klaim program Jaminan Kematian (JKm).

B. Uji Distribusi Data Frekuensi Klaim Program JKm

Uji distribusi data frekuensi dilakukan secara manual dengan metode uji Kolmogorv-Smirnov dengan menggunakan nilai signifikansi $\alpha = 0{,}01$.

Berdasarkan data frekuensi klaim Program Jaminan Kematian (JKm) pada periode Januari 2019-Desember 2019, dilakukan perhitungan secara manual menggunakan metode Kolmogorov-Smirnov dengan $\lambda = 256{,}67$.

Berdasarkan Uji Hipotesis Kolmogorov-Smirnov dengan hipotesa:

H_0: Data berdistribusi Poisson

H_1 : Data tidak berdistribusi Poisson

Statistik Uji Kolmogorov-Smirnov untuk fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} D_n &= sup|F_s(x) - F_n(x)| \\ D_n &= sup|D| \\ &= 0{,}21695 \end{aligned}$$

Berdasarkan Tabel 1 dengan $N = 12$ dan nilai signifikansi $\alpha = 0{,}01$, didapatkan $D_{N,\alpha} = 0{,}44905$. Karena $D_n < D_{N,\alpha}$ maka H_0 diterima, sehingga data frekuensi klaim program Jaminan Kematian (JKm) pada periode Januari 2019-Desember 2019 terbukti berdistribusi Poisson.

Kemudian dilakukan pengujian dengan menggunakan *Easyfit 5.5 Trial Version* untuk memvalidasi perhitungan dan diperoleh data berdistribusi diskrit Poisson untuk nilai signifikansi $\alpha = 0{,}01$. Hasil uji distribusi dengan *Easyfit 5.5 Trial Version* tertera pada Gambar 2 untuk frekuensi klaim program Jaminan Kematian (JKm).

C. Batas Bawah dan Batas Atas Peluang Kerugian Program JKm

Telah diketahui data frekuensi klaim Program Jaminan Kematian (JKm) berdistribusi Poisson dengan $\lambda = 256{,}67$ merupakan ekspektasi terjadinya klaim setiap bulan pada tahun 2019. Melalui data frekuensi klaim yang terjadi pada setiap bulan selama tahun 2019, akan dihitung besar peluang kerugian pada bulan Januari 2019 dan pada bulan Desember 2019 sebagai nilai batas untuk pembentukan model peluang kerugian pada sub bab berikutnya.

Berdasarkan data pada Januari 2019, diketahui bahwa jumlah peserta aktif sebanyak 929.683 orang, jumlah premi yang diterima oleh perusahaan sebesar Rp 16.328.490.637, jumlah akumulasi klaim yang dibayarkan perusahaan sebesar Rp 11.993.943.300, serta frekuensi klaim yang terjadi sebanyak 258 klaim. Diasumsikan perusahaan tidak menerima surplus pada tahun sebelumnya, sehingga fungsi surplus yang terjadi dengan $u = 0$ adalah

$$U = u + c - S$$
$$U = 0 + 16.328.490.637 - 11.993.943.300$$
$$U = 4.334.547.337\,.$$

Diasumsikan jumlah akumulasi klaim pada Januari 2019 dibagi dengan frekuensi klaim yang terjadi merupakan rata-rata jumlah klaim yang dibayarkan kepada satu peserta program, maka diperoleh

$$\bar{x}_{jan} = \frac{11.993.943.300}{258}$$
$$\bar{x}_{jan} = 46.488.152$$

dengan $\bar{x}$ merupakan rata-rata besar klaim oleh satu orang peserta. Pada kondisi $\bar{x}$ demikian, maka perusahaan hanya dapat menanggung klaim sebanyak 351 klaim dengan akumulasi sebesar Rp 16.317.341.446.

Maka peluang perusahaan mengalami kerugian pada Januari 2019 dapat dinyatakan sebagai peluang frekuensi klaim yang terjadi lebih dari 351 klaim. Peluang terjadinya frekuensi klaim ini dihitung dengan fungsi kepadatan peluang distribusi Poisson, namun oleh karena nilai λ yang sangat besar dan mempersulit proses perhitungan, maka akan dilakukan perhitungan berdasarkan frekuensi klaim yang terjadi setiap hari. Diasumsikan ekspektasi frekuensi klaim yang terjadi dibagi jumlah hari pada bulan Januari merupakan frekuensi klaim yang terjadi pada satu hari, maka

$$\lambda' = \frac{256.67}{31} = 8{,}2797 \approx 9\,peserta$$
$$y_{jan} = \frac{351}{31} = 11{,}322 \approx 12\,peserta$$

dengan λ' merupakan rata-rata atau ekspektasi frekuensi klaim yang terjadi pada satu hari dan y adalah frekuensi klaim yang terjadi.

Sehingga, peluang perusahaan mengalami kerugian dinyatakan dengan

$$P(y > 12) = 1 - P(y \leq 12)$$
$$P(y > 12) = 1 - [P(y = 0) + P(y = 1) + P(u = 2) + \cdots + P(y = 12)]$$
$$P(y > 12) = 0{,}12423.$$

Maka diperoleh peluang frekuensi klaim yang terjadi lebih dari 12 klaim terjadi setiap hari yang berarti peluang perusahaan mengalami kerugian adalah 0,12423 atau sebesar 12,423%. Hal ini berarti peluang perusahaan tidak mengalami kerugian adalah sebesar

$$1 - 0{,}12423 = 0{,}87577.$$

Nilai peluang tidak mengalami kerugian sebesar 0,87577 pada Januari 2019 ini akan menjadi nilai batas bawah pada pembentukan model peluang kerugian nantinya.

Dengan proses yang serupa akan dihitung nilai peluang kerugian pada Desember 2019 sebagai nilai batas atas untuk pembentukan model peluang kerugian. Berdasarkan data pada Desember 2019, diketahui bahwa jumlah peserta aktif sebanyak 926.181 orang, jumlah premi yang diterima oleh perusahaan sebesar Rp 18.200.360.193, jumlah akumulasi klaim yang dibayarkan perusahaan sebesar Rp 9.580.921.500, serta frekuensi klaim yang terjadi sebanyak 204 klaim. Diketahui perusahaan menerima surplus hingga periode November 2019 sebesar Rp 61.456.536.765, sehingga fungsi surplus yang terjadi adalah

$$U = u + c - S$$
$$U = 61.456.536.765 + 18.200.360.193 - 9.580.921.500$$
$$U = 70.075.975.458\,.$$

Diasumsikan jumlah akumulasi klaim pada Desember 2019 dibagi dengan frekuensi klaim yang terjadi merupakan rata-rata jumlah klaim yang dibayarkan kepada satu peserta program, maka diperoleh

$$\bar{x}_{des} = \frac{9.580.921.500}{204}$$
$$\bar{x}_{des} = 46.965.301$$

dengan $\bar{x}$ merupakan rata-rata besar klaim oleh satu orang peserta. Pada kondisi $\bar{x}$ demikian, maka perusahaan dapat menanggung klaim hingga sebanyak 1696 klaim dengan akumulasi sebesar Rp 79.656.896.958.

Maka peluang perusahaan mengalami kerugian pada Desember 2019 dapat dinyatakan sebagai peluang frekuensi klaim yang terjadi lebih dari 1696 klaim. Diasumsikan frekuensi klaim yang terjadi dibagi jumlah hari pada bulan Desember merupakan frekuensi klaim yang terjadi pada satu hari, maka

$$\lambda' = \frac{256{,}67}{31} = 8{,}2797 \approx 9\,peserta$$
$$y_{des} = \frac{1696}{31} = 54{,}7097 \approx 55\,peserta$$

dengan λ' merupakan rata-rata atau ekspektasi frekuensi klaim yang terjadi pada satu hari dan y adalah frekuensi klaim yang terjadi.

Sehingga, peluang perusahaan mengalami kerugian dinyatakan dengan

$$P(y > 55) = 1 - P(y \leq 55)$$
$$P(y > 55) = 1 - [P(y = 0) + P(y = 1) + P(u = 2) + \cdots + P(y = 55)]$$
$$P(y > 55) = 0.$$

Maka diperoleh peluang frekuensi klaim yang terjadi lebih dari 1696 klaim terjadi setiap hari yang berarti peluang perusahaan mengalami kerugian pada Desember 2019 adalah 0 atau sebesar 0%. Hal ini berarti, peluang perusahaan tidak mengalami kerugian adalah sebesar 1.

D. Model Peluang Kerugian Program JKm dengan Persamaan Integro-diferensial

Peluang bertahan perusahaan dalam jangka waktu yang berhingga didefiniskan $\phi(u,t) = P(U_s \geq 0, 0 \leq s \leq t\,|U_0 = u)$. Kondisi awal surplus dinyatakan sebagai u

dimana $u \geq 0$, c merupakan premi yang diterima oleh perusahaan dalam waktu t. Didefiniskan bahwa $\phi(u,t)$ memenuhi persamaan integro-diferensial parsial berikut [11],

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(u,t) = c\frac{\partial}{\partial u}\phi(u,t) - \lambda\phi(u,t) + \lambda\int_0^u \phi(u-x,t)\, p(x)\, dx$$

dengan $p(x)$ merupakan fungsi kepadatan peluang distribusi akumulasi klaim program Jaminan Kematian (JKm) yang berdistribusi normal dengan fungsi sebagai berikut

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dengan melakukan subtitusi fungsi kepadatan peluang pada persamaan intergro-diferensial parsial, maka

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(u,t) = c\frac{\partial}{\partial u}\phi(u,t) - \lambda\,\phi(u,t) + \lambda\int_0^u \phi(u-x,t)\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx$$

Kondisi optimal dinyatakan dengan,

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(u,t) = 0$$

sehingga didapatkan ϕ merupakan fungsi u,

$$c\frac{\partial}{\partial u}\phi(u) - \lambda\,\phi(u) + \lambda\int_0^u \phi(u-x)\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx = 0$$

$$-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}}\int_0^u \phi(u-x)\,e^{\frac{-x^2+2x\mu}{2\sigma^2}}\,dx$$

Misalkan $y = u - x$, maka $dx = -dy$. Sehingga, bentuk persamaan (4.4) menjadi

$$-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}}\int_u^0 \phi(y)\,e^{\frac{-(u-y)^2+2(u-y)\mu}{2\sigma^2}}(-dy)$$

$$-c\phi'(u) + \lambda\phi(u) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-u^2+2\mu u-\mu^2}{2\sigma^2}}\int_0^u \phi(y)\,e^{\frac{-y^2-2\mu y}{2\sigma^2}}e^{\frac{uy}{\sigma^2}}dy$$

Kedua ruas pada persamaan di atas dikalikan dengan $e^{-\frac{uy}{\sigma^2}}$,

$$[-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u)]e^{-\frac{uy}{\sigma^2}} = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\int_0^u \phi(y)\,e^{\frac{-y^2-2\mu y}{2\sigma^2}}\,e^{\frac{uy}{\sigma^2}}\,e^{-\frac{uy}{\sigma^2}}dy$$

$$[-c\phi'(u) + \lambda\phi(u)]e^{\frac{-u^2+ux}{\sigma^2}} = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\int_0^u \phi(y)e^{\frac{-y^2-2\mu y}{2\sigma^2}}\,dy \quad (4.6)$$

Kedua ruas pada persamaan di atas diturunkan terhadap u menjadi,

$$[-c\,\phi''(u) + \lambda\,\phi'(u)]e^{\frac{-u^2+ux}{\sigma^2}} + [-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u)]\frac{(-2u+x)}{\sigma^2}e^{\frac{-u^2+ux}{\sigma^2}} = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{(u-\mu)}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\int_0^u \phi(y)\,e^{\frac{-y^2-2\mu y}{2\sigma^2}}\,dy + \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\phi(u)e^{\frac{-u^2-2\mu u}{2\sigma^2}}$$

Subtitusi persamaan di atas, maka

$$\left[-c\,\phi''(u) + \lambda\,\phi'(u) + \left(-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u)\right)\frac{(-2u+x)}{\sigma^2}\right]e^{\frac{-u^2+ux}{\sigma^2}} = -\frac{(u-\mu)}{\sigma^2}[-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u)]e^{\frac{-u^2+ux}{\sigma^2}} + \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-2u^2-\mu^2}{2\sigma^2}}\phi(u)$$

Kedua ruas pada persamaan di atas dibagi dengan $e^{\frac{-u^2+ux}{\sigma^2}}$, sehingga menjadi

$$-c\,\phi''(u) + \lambda\,\phi'^{(u)} + \left(-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u)\right)\frac{(-2u+x)}{\sigma^2} = -\frac{(u-\mu)}{\sigma^2}[-c\,\phi'(u) + \lambda\,\phi(u)] + \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-2ux-\mu^2}{2\sigma^2}}\phi(u)$$

$$-c\phi''(u) + \lambda\phi'(u) + \frac{cu}{\sigma^2}\phi'(u) - \frac{cx}{\sigma^2}\phi'(u) + \frac{c\mu}{\sigma^2}\phi'(u) - \frac{\lambda u}{\sigma^2}\phi(u) + \frac{\lambda x}{\sigma^2}\phi(u) - \frac{\lambda\mu}{\sigma^2}\phi(u) - \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-2ux-\mu^2}{2\sigma^2}}\phi(u) = 0$$

Kedua ruas pada persamaan di atas dikalikan dengan $-\frac{1}{c}$, maka

$$\phi''(u) - \frac{\lambda}{c}\phi'(u) - \frac{u}{\sigma^2}\phi'(u) + \frac{x}{\sigma^2}\phi'(u) - \frac{\mu}{\sigma^2}\phi'(u) + \frac{\lambda u}{c\sigma^2}\phi(u) - \frac{\lambda x}{c\sigma^2}\phi(u) + \frac{\lambda\mu}{c\sigma^2}\phi(u) + \frac{\lambda}{c\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-2ux-\mu^2}{2\sigma^2}}\phi(u) = 0$$

$$\phi''(u) + \left[-\frac{\lambda}{c} + \frac{x-u-\mu}{\sigma^2}\right]\phi'(u) + \left[-\frac{\lambda}{c}\,\frac{(x-u-\mu)}{\sigma^2} + \frac{\lambda}{c\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-2ux-\mu^2}{2\sigma^2}}\right]\phi(u) = 0$$

Subtitusi $Z = \frac{x-u-\mu}{\sigma}$ dengan nilai signifikansi $\alpha = 0{,}01$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{x-u-\mu}{\sigma}$$

$$Z_{0{,}995} = \frac{x-u-\mu}{\sigma}.$$

Dengan melihat nilai dari Z-score pada tabel distribusi normal (Tabel 2), diperoleh

$$\frac{x-u-\mu}{\sigma} = 2{,}576$$

Sehingga, persamaan menjadi

$$\phi''(u) + \left[-\frac{\lambda}{c} + \frac{2{,}576}{\sigma}\right]\phi'(u) + \left[-\frac{\lambda}{c}\,\frac{2{,}576}{\sigma} + \frac{\lambda}{c\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{5{,}152\sigma x-2x^2+2x\mu-\mu^2}{2\sigma^2}}\right]\phi(u) = 0$$

Misalkan,

$$\phi(u) = e^{mu}$$
$$\phi'(u) = me^{mu}$$
$$\phi''(u) = m^2e^{mu}$$

Maka bentuk persamaan menjadi

$$\left[m^2 + \left(-\frac{\lambda}{c} + \frac{2{,}576}{\sigma}\right)m + \left(-\frac{\lambda}{c}\,\frac{2{,}576}{\sigma} + \frac{\lambda}{c\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{5{,}152\sigma x-2x^2+2x\mu-\mu^2}{2\sigma^2}}\right)\right]e^{mu} = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$m^2 + \left(-\frac{\lambda}{c} + \frac{2{,}576}{\sigma}\right)m + \left(-\frac{\lambda}{c}\frac{2{,}576}{\sigma} + \frac{\lambda}{c\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{5{,}152\sigma x - 2x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2}}\right) = 0$$

Maka diperoleh nilai m_1 dan m_2

$$m_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{2{,}576}{\sigma}\right) + \sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2} - \frac{5{,}152\lambda}{c\sigma} + \frac{6{,}6358}{\sigma^2} + \frac{10{,}304\lambda}{c\sigma} - \frac{4\lambda}{c\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{5{,}152\sigma x - 2x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2}}}\right]$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{2{,}576}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{\lambda^2}{c^2} - \frac{5{,}152\lambda}{c\sigma} + \frac{6{,}6358}{\sigma^2} + \frac{10{,}304\lambda}{c\sigma} - \frac{4\lambda}{c\,\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{5{,}152\sigma x - 2x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2}}}\right]$$

Karena persamaan di atas merupakan persamaan linear homogen tingkat dua dengan akar-akarnya tidak kembar dimana $m_1 \neq m_2$, maka solusi persamaannya adalah

$$\phi(u) = A_1 e^{m_1 u} + A_2$$

Solusi dari persamaan tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan batas bawah dan batas atas pada sub bab sebelumnya. Karena $\phi(u)$ merupakan peluang perusahaan bertahan atau tidak mengalami kerugian, maka nilai batas bawahnya adalah $\phi(u) = 0{,}87577$ dan nilai batas atasnya adalah $\phi(u) = 1$. Dengan melakukan subtitusi nilai peluang pada bulan Januari 2019 dengan $u = 0$, maka

$$\phi(0) = A_1 e^{m_1 0} + A_2 e^{m_2 0}$$

$$A_2 = 0{,}87577 - A_1$$

Kemudian untuk mendapatkan nilai dari A_1 dilakukan subtitusi pada batas atas peluang kerugian di periode Desember 2019, maka

$$\phi(u) = A_1 e^{m_1 u} + (0{,}87577 - A_1)e^{m_2 u}$$
$$1 = (e^{m_1 u} - e^{m_2 u})A_1 + 0{,}87577 e^{m_2 u}$$

$$A_1 = \frac{1 - 0{,}87577 e^{m_2 u}}{e^{m_1 u} - e^{m_2 u}}$$

Untuk mendapatkan nilai dari A_1 dan A_2 dilakukan dengan menerapkan model peluang pada persamaan (4.11) dengan data yang digunakan adalah data pada Desember 2019 sebagai batas atas, yakni

$$\lambda = 256{,}67$$
$$c = 18.200.360.193$$
$$\sigma = 2.173.800.000$$
$$\mu = 12.012.000.000$$
$$x = 9.580.921.500$$

Diperoleh nilai dari $m_1 = 1{,}36199 \times 10^{-8}$ dan $m_2 = -7{,}02432 \times 10^{-10}$.

Kemudian dengan menggunakan peluang pada batas atas di periode Desember 2019 dengan $u = 61.456.536.765$ dan nilai nilai dari A_1 pada persamaan (4.12), maka

$$A_1 = \frac{1 - 0{,}87577 e^{(-7{,}02432\times10^{-10})(61.457)}}{e^{(1{,}36199\times10^{-8})(61.457)} - e^{(-7{,}02432\times10^{-10})(61.457)}}$$
$$A_1 = 141{,}1129$$

sehingga, $A_2 = -140{,}2372$. Salah satu hal yang menjadi catatan pada perhitungan ini adalah nilai dari u atau initial surplus yang disubtitusi hendaknya dalam satuan jutaan sehingga dapat mempermudah perhitungan. Sebagai contoh, nilai u pada Desember 2019 adalah 61.456.536.765, namun yang disubtitusi pada persamaan adalah 61.457 dalam satuan jutaan. Maka, model peluang pada persamaan (4.12) menjadi

$$\phi(u) = 141{,}1129 e^{m_1 u} - 140{,}2372 e^{m_2 u}$$

Dengan demikian, diperoleh model peluang kerugian untuk Program Jaminan Kematian (JKm) PT ASABRI (Persero) berdasarkan data pada tahun Januari 2019-Desember 2019 sebagai berikut:

$$\psi(u) = 1 - \phi(u)$$
$$\psi(u) = 1 - 141{,}1129 e^{m_1 u} + 140{,}2372 e^{m_2 u}$$

E. Simulasi Peluang Kerugian Program JKm

Berdasarkan model persamaan peluang kerugian (4.15) dilakukan simulasi dengan nilai surplus u merupakan surplus pada setiap bulan. Diperoleh grafik hasil simulasi seperti pada Gambar 3 dan Gambar 4.

Terlihat bahwa semakin besar nilai u, maka semakin kecil nilai peluang kerugian perusahaan pada Program JKm. Pada akhir tahun terlihat nilai peluang kerugian sama dengan nol yang berarti pada kondisi surplus tersebut, perusahaan berada pada kondisi yang tidak akan mengalami kerugian.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari penelitian diperoleh kesimpulan sebagai berikut: (1) Model peluang kerugian Program Jaminan Kerugian PT ASABRI (Persero) berdasarkan data premi di tahun 2019, frekuensi klaim di tahun 2019, serta jumlah klaim di tahun 2019 dinyatakan sebagai $\psi(u) = 1 - 141{,}1129 e^{m_1 u} + 140{,}2372 e^{m_2 u}$. (2) Hasil simulasi peluang kerugian Program JKm terhadap nilai surplus berdasarkan data di tahun 2019 menunjukkan bahwa semakin besar nilai surplus, maka peluang kerugian semakin kecil.

DAFTAR PUSTAKA

[1] P. R. Indonesia, "Undang-Undang Republik Indonesia Nomor 5 Tahun 2014 Tentang Aparatur Sipil Negara." Kemeterian Sekretariat Negara Republik Indonesia, Jakarta, 2014.

[2] Y. Andriani, "Analisis penyelesaian integrasi perkalian dalam membentuk model peluang kebangkrutan suatu perusahaan asuransi," *J. Penelit. Sains*, vol. 12, no. 3, pp. 1–5, 2009.

[3] OJK, "Peraturan Otoritas Jasa Keuangan Nomor 73/POJK. 05/2017 Tentang Tata Kelola Perusahaan yang Baik Bagi Perusahaan Perasuransian." Otoritas Jasa Keuangan, Jakarta, 2016.

[4] N. P. Mintari, "Pemodelan dan Simulasi untuk Mengetahui Kebangkrutan Perusahaan Asuransi Berdasarkan Ukuran Klaim," in *Proceedings of Engineering*, 2017, vol. 4, no. 2, pp. 3025–3032.

[5] I. Qudsiyah, H. T. Sutanto, and A. Oktaviarina, "Menentukan model peluang kebangkrutan perusahaan asuransi dengan persamaan integro-diferensial," *J. Ilm. Mat. Univ. Negeri Surabaya*, vol. 2, no. 3, 2013.

[6] A. Awatif, I. G. P. Purnaba, and I. W. Mangku, "Simulasi sistem bonus-malus pada asuransi kendaraan bermotor berdasarkan jenis kecelakaan dan tingkat keparahan," *J. Math. Its Appl.*, vol. 17, no. 1, pp. 17–32, 2018.

[7] L. J. Bain and Max Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, 2nd ed. Kentucky: Duxbury, 1992.

[8] F. Diba, "Pemodelan dan simulasi peluang kebangkrutan perusahaan asuransi dengan analisis nilai premi dan ukuran klaim diasumsikan berdistribusi eksponensial," *Indones. J. Comput.*, vol. 2, no. 2, p. 1, 2017, doi: 10.21108/indojc.2017.2.2.147.

[9] A. Devin Sezer, "Modeling of an insurance system and its large deviations analysis," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 235, no. 3, pp. 535–

546, 2010, doi: 10.1016/j.cam.2010.06.003.

[10] V. Lakshmikantham and M. R. M. Rao, *Theory of Integro-Differential Equations*, 1st ed. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1995.

[11] G. E. Willmot, "On a partial integrodifferential equation of seal's type," *Insur. Math. Econ.*, vol. 62, pp. 54–61, 2015, doi: 10.1016/j.insmatheco.2015.03.004.