

Kontrol Optimal Penyebaran COVID-19 Model SEIR di Jakarta

Nada Fitriani Azzahra, Hariyanto, dan Mardlijah

Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (ITS)

e-mail: hariyantomath@gmail.com

Abstrak—Penyakit *coronavirus* (COVID-19) masuk ke Indonesia dan pertama kali terdeteksi di Jakarta. Hingga Juli 2020, kasus positif COVID-19 di Jakarta menjadi penyumbang kasus positif terbanyak di Indonesia. Hal ini menunjukkan bahwa penyebaran COVID-19 semakin meningkat dan perlu penanganan yang lebih maksimal. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dibahas tentang pemberian kontrol yang optimal untuk mengendalikan penyebaran COVID-19 di Jakarta dengan model SEIR (*Susceptible Exposed Infected Recovered*). Model SEIR yang digunakan merupakan hasil pengembangan dari model yang sudah ada dengan mengikuti kondisi penyebaran COVID-19 di Jakarta. Salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mengontrol penyebaran COVID-19 adalah dengan melakukan *testing*. *Testing* dilakukan pada populasi *exposed* dengan tujuan dapat mengurangi penyebaran COVID-19 di Jakarta. Kemudian menentukan kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dan diselesaikan secara numerik menggunakan program Matlab berdasarkan metode *forward-backward sweep* Runge-Kutta orde empat. Dari hasil analisis simulasi, didapat bahwa dengan melakukan *testing* pada populasi *exposed* yang mengakibatkan berkurangnya jumlah populasi *exposed* sebesar 99% sehingga dapat mengurangi penyebaran COVID-19 di Jakarta.

Kata Kunci—COVID-19, model SEIR, Prinsip Maksimum Pontryagin.

I. PENDAHULUAN

PENYAKIT *coronavirus* (COVID-19) adalah penyakit yang disebabkan oleh jenis *coronavirus* baru yaitu Sars-CoV-2. Penyakit COVID-19 ini sudah mewabah hampir ke seluruh dunia. Berdasarkan jurnal *Transmission Dynamics and Control Methodology of COVID-19*, penyakit COVID-19 telah berkembang menjadi pandemi dalam rentang waktu yang sangat singkat. Untuk mengatasi masalah tersebut diperlukan pencegahan dan pengendalian COVID-19 dengan mengambil tindakan secepat mungkin sehingga dapat menurunkan tingkat kontak. Dengan kata lain, karantina memiliki dampak signifikan pada pengurangan penyebaran COVID-19 [1]. Indonesia sebagai salah satu negara di dunia yang terdampak COVID-19 sudah memberlakukan karantina wilayah namun belum efektif karena kasus positif masih mengalami peningkatan.

Kasus positif COVID-19 pertama Indonesia yaitu di Jakarta. Kasus tersebut terdeteksi pada 3 Maret 2020 dengan tiga kasus positif. Sejak kasus positif pertama, penambahan kasus harian Jakarta mengalami peningkatan dan penurunan. Seperti pada tanggal 17 Februari 2021, kasus positif harian Jakarta sebanyak 1.445 orang, kemudian menurun pada 18 Februari 2021 menjadi 373 orang, dan pada 19 Februari 2021 meningkat lagi menjadi 1.920 orang. Sampai tanggal 28 Februari 2021, Jakarta menjadi penyumbang total kasus positif COVID-19 tertinggi di Indonesia, yaitu sebesar 25,4% dengan total kasus positif Jakarta sudah mencapai 343.407. Selain memiliki kasus positif yang tinggi, *positivity*

rate kasus COVID di Indonesia, khususnya Jakarta jauh di atas angka ideal *positivity rate* yang ditetapkan oleh World Health Organization (WHO) yaitu sebesar 5%. Hingga tanggal 28 Februari 2021, *positivity rate* Indonesia mencapai 26,2% dan Jakarta mencapai 19%. Oleh karena itu diperlukan upaya yang lebih maksimal agar penyebaran COVID-19 dapat dikendalikan.

Pada penelitian Suwardi Annas (2020)[2], telah dibangun model SEIR untuk COVID-19 di Indonesia dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi dan isolasi sebagai parameter model. Kemudian dilakukan analisis kestabilan dan simulasi numerik model SEIR terhadap penyebaran COVID-19. Model SEIR pada penelitian tersebut masih dapat dikembangkan sesuai kondisi Jakarta saat ini. Selain itu, perlu juga dipertimbangkan pemberian variabel control agar didapat solusi yang optimal dalam upaya pencegahan penyebaran COVID-19.

Dalam penelitian ini digunakan model epidemi SEIR yang didasarkan pada asumsi standar: populasi dibagi ke dalam kelompok *susceptible* (S) yakni individu yang rentan terhadap penyakit COVID-19, *exposed* (E) yakni individu yang terpapar penyakit dan tidak memiliki gejala ataupun bergejala ringan tetapi belum terdeteksi, *infected* (I) yakni individu yang terinfeksi penyakit dan sudah terdeteksi, dan *recovered* (R) yakni individu yang telah sembuh dari penyakit COVID-19.

Model matematika pada penelitian ini merupakan pengembangan dari model matematika yang dilakukan oleh Suwardi Annas [2]. Selain itu, dibahas suatu sistem penyebaran COVID-19 dimana populasi terpapar (*exposed*) diberikan control berupa *testing*/pemeriksaan. *Testing* adalah upaya yang dilakukan dengan melakukan pemeriksaan terhadap individu yang dipilih secara acak dari sebuah kelompok yang berpotensi terjadi penularan. *Testing* yang dilakukan secara optimal dapat menekan laju penyebaran COVID-19. Oleh karena itu, perlu dilakukan kontrol berupa *testing* untuk meminimalkan jumlah orang yang terpapar (*exposed*) dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dan diharapkan penyebaran COVID-19 di Jakarta dapat dihentikan.

II. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini menggunakan data terkait populasi *infected* dan *recovered* sejak tanggal 7 April sampai 31 Mei 2021 yang didapatkan dari website JAKARTA TANGGAP COVID-19, serta data-data lainnya yang menunjang penelitian. Selanjutnya dilakukan pengembangan model matematika dari penelitian Suwardi Annas [2] dengan menambahkan beberapa parameter dan membeikan variabel kontrol berupa *testing*. Dari model matematika tersebut dilakukan analisis sifat model matematika, yaitu analisis kestabilan pada model matematika dan analisis

keterkontrolan pada model yang telah diberikan variabel kontrol. Setelah itu ditentukan formulasi masalah kontrol optimal yang meliputi model matematika, fungsi objektif serta syarat batas yang harus dipenuhi. Kemudian masalah tersebut diselesaikan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dengan membentuk fungsi Hamiltonian, menentukan kontrol optimal, serta menentukan persamaan *state* dan *costate*. Dengan hasil yang diperoleh dari penyelesaian masalah kontrol optimal, selanjutnya dibuat program simulasi dari model dengan menggunakan *software* Matlab. Dilakukan simulasi dengan memanfaatkan metode *forward-backward sweep* Runge-Kutta orde empat untuk memastikan hasil yang sesuai dengan hasil analisis kestabilan dan untuk mengetahui dinamika perubahan jumlah populasi *exposed* saat sebelum dan sesudah diberikan kontrol.

III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika

Pada penelitian yang telah dilakukan oleh Suwardi Annas, didapatkan model matematika penyebaran COVID-19 di Indonesia seperti Persamaan (1) berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N - (\alpha I + \mu + \nu)S \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha IS - (\beta + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta E - (\mu_i + \delta + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I + \nu S - \mu \end{aligned} \tag{1}$$

Kemudian pada penelitian ini dilakukan modifikasi dari model matematika pada persamaan (1) sehingga diperoleh model matematika penyebaran COVID-19 di Jakarta seperti pada persamaan (2) berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \omega - \alpha \epsilon ES - \alpha(1 - \epsilon)ES - \mu S + \gamma R \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha \epsilon ES - \beta \sigma E - \theta(1 - \sigma)E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha(1 - \epsilon)ES + \beta \sigma E - \mu_i I - \delta I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I + \theta(1 - \sigma)E - \gamma R - \mu R \end{aligned} \tag{2}$$

dimana

- N : total populasi di Jakarta
- S : populasi rentan *susceptible*
- E : populasi terpapar *exposed*
- I : populasi terinfeksi *infected*
- R : populasi telah sembuh *recovered*
- ω : banyaknya kelahiran individu
- μ : tingkat kematian alami individu
- α : *rate* penularan dari S menjadi E
- β : *rate* penambahan gejala dari E ke I
- θ : *rate* kesembuhan individu terpapar dari E ke R
- δ : *rate* kesembuhan individu terinfeksi dari I ke R

- γ : *rate* perpindahan individu R menjadi S
- μ_i : *rate* kematian individu akibat COVID-19
- σ : proporsi individu E yang menjadi I
- $1 - \sigma$: proporsi individu E yang menjadi R
- ϵ : proporsi individu S yang menjadi E
- $1 - \epsilon$: proporsi individu S yang menjadi I

B. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem persamaan diperoleh jika[3].

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$$

1) Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan suatu kondisi yang tidak terdapat penyebaran COVID-19 dalam suatu populasi sehingga tidak ada populasi *exposed*, *infected* maupun *recovered*, dengan kata lain $E = I = R = 0$. Dengan merujuk pada tinjauan pustaka, maka akan didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut.

$$K_0 = (S^0, E^0, I^0, R^0) = \left(\frac{\omega}{\mu}, 0, 0, 0\right)$$

2) Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik penyakit digunakan untuk mengindikasikan kemungkinan terjadinya persebaran penyakit. Dalam kondisi endemik ini, setiap populasi tidak sama dengan nol ($S \neq 0; E \neq 0; I \neq 0; R \neq 0$). Dengan merujuk pada tinjauan pustaka, maka akan didapatkan titik kesetimbangan endemik sebagai berikut.

$$K_e = (S^e, E^e, I^e, R^e)$$

dimana

$$S^e = \frac{\mu + \beta\tau + (1 - \sigma)\theta}{\alpha\epsilon}$$

$$\begin{aligned} E^e = & -[(\gamma + \mu)(\delta + \mu + \mu_i)(\mu^2 - \alpha\epsilon\omega + \beta\mu\sigma + \mu(1 - \sigma)\theta)] [\alpha\mu^3(1 - \epsilon) + \alpha\epsilon\mu^3 + \alpha\delta\epsilon\mu^2 + \alpha\epsilon\gamma\mu^2 + \alpha\epsilon\mu^2\mu_i + \alpha\delta\mu^2(1 - \epsilon) + \alpha\gamma\mu^2(1 - \epsilon) + \alpha\mu^2\mu_i(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon\gamma\mu + \alpha\epsilon\gamma\mu\mu_i + \alpha\gamma\mu\mu_i(1 - \epsilon) + \alpha\beta\epsilon\mu^2\sigma + \alpha\beta\mu^2\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\epsilon\mu^2(1 - \sigma)\theta + \alpha\mu^2(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + 2\alpha\beta\delta\epsilon\gamma\sigma + \alpha\beta\delta\epsilon\mu\sigma + \alpha\beta\epsilon\gamma\mu\sigma + \alpha\beta\epsilon\gamma\mu_i\sigma + \alpha\beta\epsilon\mu\mu_i\sigma + \alpha\beta\delta\mu\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\gamma\mu\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\gamma\mu_i\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon\mu(1 - \sigma)\theta + \alpha\beta\mu\mu_i\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\epsilon\mu\mu_i(1 - \sigma)\theta + \alpha\delta\mu(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\gamma\mu(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\gamma\mu_i(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\mu\mu_i(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^e = & -[(\gamma + \mu)(\mu^2 - \alpha\epsilon\omega + \beta\mu\sigma + \mu(1 - \sigma)\theta)(\mu(1 - \epsilon) + \beta\epsilon\sigma + \beta\sigma(1 - \epsilon) + (1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta)] [\alpha\epsilon^2\mu^3 + \alpha\epsilon\mu^3(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon^2\mu^2 + \alpha\epsilon^2\gamma\mu^2 + \alpha\epsilon^2\mu^2\mu_i + \alpha\beta\epsilon^2\mu^2\sigma + \alpha\epsilon^2\mu^2(1 - \sigma)\theta + \alpha\delta\epsilon^2\gamma\mu + \alpha\epsilon^2\gamma\mu\mu_i + \alpha\delta\epsilon\mu^2(1 - \epsilon) + \alpha\epsilon\gamma\mu^2(1 - \epsilon) + \alpha\epsilon\mu^2\mu_i(1 - \epsilon) + \alpha\beta\delta\epsilon^2\mu\sigma + \alpha\beta\epsilon^2\gamma\mu\sigma + \alpha\beta\epsilon^2\gamma\mu_i\sigma + \alpha\beta\epsilon^2\mu\mu_i\sigma + \alpha\beta\epsilon\mu^2\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon^2\mu(1 - \sigma)\theta + \alpha\epsilon^2\mu\mu_i(1 - \sigma)\theta + \alpha\epsilon\mu^2(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\gamma\mu\mu_i(1 - \epsilon) + \alpha\beta\delta\epsilon\mu\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\epsilon\gamma\mu\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\epsilon\gamma\mu_i\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\epsilon\gamma\mu_i\sigma(1 - \epsilon)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\epsilon) + \alpha\beta\epsilon\mu\mu_i\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon\mu(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\gamma\mu(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\gamma\mu_i(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\mu\mu_i(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta]^{-1}$$

$$R^e = -[-(\delta\mu^3(1 - \epsilon) + \epsilon\mu^2(1 - \sigma)^2\theta^2 + \epsilon\mu^3(1 - \sigma)\theta + \beta^2\delta\epsilon\mu\sigma^2 + \beta^2\delta\mu\sigma^2(1 - \epsilon) + \delta\epsilon\mu(1 - \sigma)^2\theta^2 + \epsilon\mu\mu_i(1 - \sigma)^2\theta^2 + \delta\mu(1 - \sigma)^2(1 - \epsilon)\theta^2 + \beta\delta\epsilon\mu^2\sigma + 2\beta\delta\mu^2\sigma(1 - \epsilon) + \delta\epsilon\mu^2(1 - \sigma)\theta + \epsilon\mu^2\mu_i(1 - \sigma)\theta + 2\delta\mu^2(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta - \alpha\beta\delta\epsilon^2\omega\sigma - \alpha\delta\epsilon^2\omega(1 - \sigma)\theta - \alpha\epsilon^2\mu\omega(1 - \sigma)\theta - \alpha\epsilon^2\mu_i\omega(1 - \sigma)\theta + \beta\epsilon\mu^2(1 - \sigma)\sigma\theta - \alpha\delta\epsilon\mu\omega(1 - \epsilon) - \alpha\beta\delta\epsilon\omega\sigma(1 - \epsilon) + 2\beta\delta\epsilon\mu(1 - \sigma)\sigma\theta - \alpha\delta\epsilon\omega(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \beta\epsilon\mu\mu_i(1 - \sigma)\sigma\theta + 2\beta\delta\mu(1 - \sigma)\sigma(1 - \epsilon)\theta][(\alpha\epsilon^2\mu^3 + \alpha\epsilon\mu^3(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon^2\mu^2 + \alpha\epsilon^2\gamma\mu^2 + \alpha\epsilon^2\mu^2\mu_i + \alpha\beta\epsilon^2\mu^2\sigma + \alpha\epsilon^2\mu^2(1 - \sigma)\theta + \alpha\delta\epsilon^2\gamma\mu + \alpha\epsilon^2\gamma\mu\mu_i + \alpha\delta\epsilon\mu^2(1 - \epsilon) + \alpha\epsilon\gamma\mu^2(1 - \epsilon) + \alpha\epsilon\mu^2\mu_i(1 - \epsilon) + \alpha\beta\delta\epsilon^2\mu\sigma + \alpha\beta\epsilon^2\gamma\mu\sigma + \alpha\beta\epsilon^2\gamma\mu_i\sigma + \alpha\beta\epsilon^2\mu\mu_i\sigma + \alpha\beta\epsilon\mu^2\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon^2\mu(1 - \sigma)\theta + \alpha\epsilon^2\mu\mu_i(1 - \sigma)\theta + \alpha\epsilon\mu^2(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\gamma\mu\mu_i(1 - \epsilon) + \alpha\beta\delta\epsilon\mu\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\epsilon\gamma\mu\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\epsilon\gamma\mu_i\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\beta\epsilon\mu\mu_i\sigma(1 - \epsilon) + \alpha\delta\epsilon\mu(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\gamma\mu(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\gamma\mu_i(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta + \alpha\epsilon\mu\mu_i(1 - \sigma)(1 - \epsilon)\theta]]^{-1}$$

C. Analisis Kestabilan

Kestabilan lokal merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan. Untuk sistem tak linear harus dilinearkan sehingga didapatkan bentuk sistem linear. Berikut ini sifat kestabilan lokal di sekitar titik kesetimbangan.

1. Titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.
3. Titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) > 0$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

1) Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Langkah pertama dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit adalah mengevaluasi nilai titik kesetimbangan $K_0 = (S^0, E^0, I^0, R^0) = (\frac{\omega}{\mu}, 0, 0, 0)$ pada matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{K_0} = \begin{bmatrix} -a_1 - a_2 - \mu & -a_3 - a_4 & 0 & \gamma \\ a_1 & a_3 - a_5 - a_6 - \mu & 0 & 0 \\ a_2 & a_4 + a_5 & -a_8 & 0 \\ 0 & a_6 & \delta & -a_7 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & a_5 &= \beta\sigma \\ a_2 &= 0 & a_6 &= \theta(1 - \sigma) \\ a_3 &= \alpha\epsilon S & a_7 &= \gamma + \mu \\ a_4 &= \alpha(1 - \epsilon)S & a_8 &= \mu_i + \delta + \mu \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda_1 + \mu)(\lambda_2 - a_3 + a_5 + a_6 + \mu)(\lambda_3 + a_8)(\lambda_4 + a_7) = 0$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka λ_1, λ_3 dan

λ_4 bernilai negatif. Sedangkan sistem akan bersifat stabil di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit jika $\lambda_2 < 0$, berarti $a_3 < a_5 + a_6 + \mu$, dan sistem bersifat tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit jika $\lambda_2 > 0$, berarti $a_3 > a_5 + a_6 + \mu$.

2) Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan Endemik

Langkah pertama dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit adalah mengevaluasi nilai titik kesetimbangan $K_e = (S^e, E^e, I^e, R^e)$ pada matriks Jacobian, sehingga diperoleh

$$J_{K_e} = \begin{bmatrix} -a_1 - a_2 - \mu & -a_3 - a_4 & 0 & \gamma \\ a_1 & a_3 - a_5 - a_6 - \mu & 0 & 0 \\ a_2 & a_4 + a_5 & -a_8 & 0 \\ 0 & a_6 & \delta & -a_7 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha\epsilon E & a_5 &= \beta\sigma \\ a_2 &= \alpha(1 - \epsilon)E & a_6 &= \theta(1 - \sigma) \\ a_3 &= \alpha\epsilon S & a_7 &= \gamma + \mu \\ a_4 &= \alpha(1 - \epsilon)S & a_8 &= \mu_i + \delta + \mu \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$A_0\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0$$

dimana

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2\mu \\ A_2 &= a_1a_4 + a_1a_5 + a_1a_6 - a_2a_3 + a_2a_5 + a_2a_6 + a_7a_8 + a_1\mu + a_2\mu - a_3\mu + a_5\mu + a_6\mu + \mu^2 \\ A_3 &= a_1a_3a_7 + a_1a_4a_7 + a_1a_3a_8 - a_1a_4a_8 + a_2\delta\gamma - a_1a_6\gamma \\ A_4 &= a_1a_3a_7a_8 + a_1a_4a_7a_8 - a_2a_5\delta\gamma + a_2a_3\delta\gamma - a_2a_6\delta\gamma + a_2\mu\delta\gamma - a_1a_4\delta\gamma - a_1a_5\delta\gamma - a_1a_6a_8\gamma \end{aligned}$$

Karena nilai eigen dari persamaan karakteristik sulit untuk ditentukan, maka untuk mengetahui sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangan endemik menggunakan kriteria Routh-Hurwitz sehingga diperoleh syarat yaitu:

$$A_1, A_2, A_3, A_4 > 0$$

$$A_1A_2 > A_3$$

$$(A_1A_2 - A_3)A_3 > A_1^2A_4$$

Jika ketiga syarat di atas terpenuhi, maka sistem bersifat stabil asimtotik. Namun jika ketiga syarat di atas tidak terpenuhi, maka sistem bersifat tidak stabil.

D. Analisis Keterkontrolan

Suatu sistem dapat diberikan kontrol jika berdasarkan analisis keterkontrolannya bersifat terkontrol. Syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah sebagai berikut [4].

1. $w(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-AT}BB^Te^{-A^TT}dT$ non-singular
2. Matriks $M_c = (B|AB|A^2B| \dots |A^{n-1}B)$ mempunyai rank sama dengan n .

Sebelum dilakukan analisis keterkontrolan, dilakukan konstruksi model dengan menambahkan kontrol yang diinginkan. Dalam penelitian ini diberikan variabel kontrol u yang merupakan proporsi dilakukannya *testing* sehingga model kontrol optimal untuk penyebaran COVID-19 di Jakarta adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \omega - \alpha\epsilon ES - \alpha(1 - \epsilon)ES - \mu S + \gamma R$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha\epsilon ES - \beta\sigma E - \theta(1 - \sigma)E - \mu E - uE$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1 - \epsilon)ES + \beta\sigma E - \mu_i I - \delta I - \mu I + uE$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \theta(1 - \sigma)E - \gamma R - \mu R$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ yang kemudian diperoleh ruang keadaan sehingga diperoleh matriks A dan B .

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 - a_2 - \mu & -a_3 - a_4 & 0 & \gamma \\ a_1 & a_3 - a_5 - a_6 - \mu & 0 & 0 \\ a_2 & a_4 + a_5 & -a_8 & 0 \\ 0 & a_6 & \delta & -a_7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -E^e \\ E^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari *rank* dari $M_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ dan diperoleh $rank(M_c) = 4$, sehingga model penyebaran COVID-19 adalah sistem yang terkontrol.

E. Formulasi dan Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal

Formulasi masalah kontrol optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu sistem atau model, menentukan fungsi objektif, dan kendala atau syarat batas yang berlaku, dengan tujuan untuk mencari nilai $u(t)$ yang dapat mengoptimalkan fungsi objektif.

Pada penelitian ini fungsi objektif yang diminimumkan yaitu

$$J(u) = \int_0^{t_f} \left(E + \frac{cu^2}{2} \right) dt$$

dimana E merupakan populasi *exposed*, koefisien c merupakan koefisien bobot untuk meminimumkan populasi *exposed* yang didasarkan pada biaya dari *testing* yang dilakukan. Dengan kata lain, akan diminimumkan populasi *exposed* dengan cara dilakukan *testing* dengan biaya yang minimum.

Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari *state* awal hingga *state* akhir, yaitu dengan memaksimalkan fungsi objektif dengan kontrol $u(t)$ terbatas pada ($u(t) \in U$). Langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut.

- Langkah 1: membentuk fungsi Hamiltonian

$$\mathcal{H}(S, E, I, R, u, \lambda) = E + \frac{cu^2}{2} + \lambda_1(\omega - \alpha\epsilon ES - \alpha(1 - \epsilon)ES - \mu S + \gamma R) + \lambda_2(\alpha\epsilon ES - \beta\sigma E - \theta(1 - \sigma)E - \mu E - uE) + \lambda_3(\alpha(1 - \epsilon)ES + \beta\sigma E - \mu_i I - \delta I - \mu I + uE) + \lambda_4(\delta I + \theta(1 - \sigma)E - \gamma R - \mu R)$$

- Langkah 2: meminimumkan \mathcal{H} terhadap semua vektor kontrol $u(t)$ Untuk menentukan kondisi stasioner

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$$

$$cu - \lambda_2 E + \lambda_3 E = 0$$

dan diperoleh

$$u^* = \frac{\lambda_2 E - \lambda_3 E}{c}$$

- Langkah 3: menggunakan hasil dari langkah 2 yaitu dengan mensubstitusikannya ke dalam langkah 1 dan menentukan \mathcal{H} yang optimal.

$$\mathcal{H}^*(S^*, E^*, I^*, R^*, u^*, \lambda^*) = E + \frac{cu^{*2}}{2} + \lambda_1(\omega - \alpha\epsilon ES - \alpha(1 - \epsilon)ES - \mu S + \gamma R) + \lambda_2(\alpha\epsilon ES - \beta\sigma E - \theta(1 - \sigma)E - \mu E - u^*E) + \lambda_3(\alpha(1 - \epsilon)ES + \beta\sigma E - \mu_i I - \delta I - \mu I + u^*E) + \lambda_4(\delta I + \theta(1 - \sigma)E - \gamma R - \mu R)$$

- Langkah 4: menyelesaikan persamaan *state* $\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\right)^*$

$$\frac{dS^*}{dt} = \omega - \alpha\epsilon ES - \alpha(1 - \epsilon)ES - \mu S + \gamma R$$

$$\frac{dE^*}{dt} = \alpha\epsilon ES - \beta\sigma E - \theta(1 - \sigma)E - \mu E - uE$$

$$\frac{dI^*}{dt} = \alpha(1 - \epsilon)ES + \beta\sigma E - \mu_i I - \delta I - \mu I + u^*E$$

$$\frac{dR^*}{dt} = \delta I + \theta(1 - \sigma)E - \gamma R - \mu R$$

dan persamaan *costate* $-\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)^*$

$$\frac{d\lambda_1^*}{dt} = -[-\lambda_1(\alpha\epsilon E + \alpha(1 - \epsilon)E + \mu) + \lambda_2\alpha\epsilon E + \lambda_3\alpha(1 - \epsilon)E]$$

$$\frac{d\lambda_2^*}{dt} = -[1 - \lambda_1(\alpha\epsilon S + \alpha(1 - \epsilon)S) + \lambda_2(\alpha\epsilon S - \beta\sigma - \theta(1 - \sigma) - \mu - u^*) + \lambda_3(\alpha(1 - \epsilon)S + \beta\sigma + u^*) + \lambda_4\theta(1 - \sigma)]$$

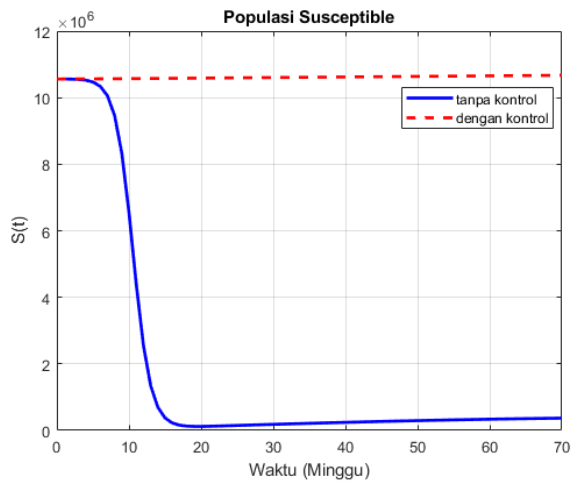
$$\frac{d\lambda_3^*}{dt} = -[-\lambda_3(\mu_i + \delta + \mu) + \lambda_4\delta]$$

$$\frac{d\lambda_4^*}{dt} = -[\lambda_1\gamma - \lambda_4(\gamma + \mu)]$$

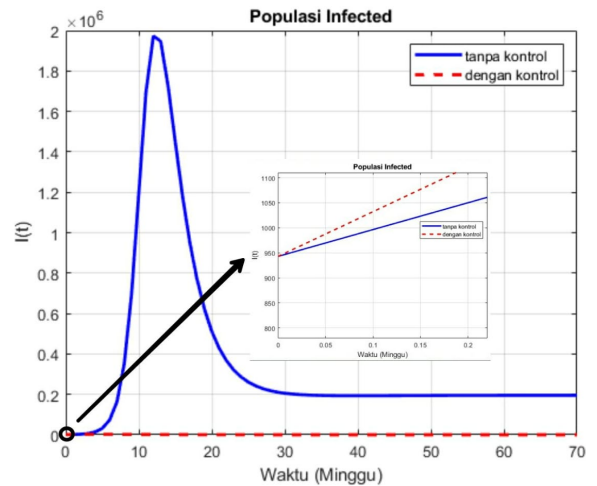
dengan kondisi awal $x(0)$ dan kondisi akhir $x(t_f)$ bebas dan t_f ditentukan, sehingga kondisi transversalitasnya adalah

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda_i^* \right]_{t_f} = 0$$

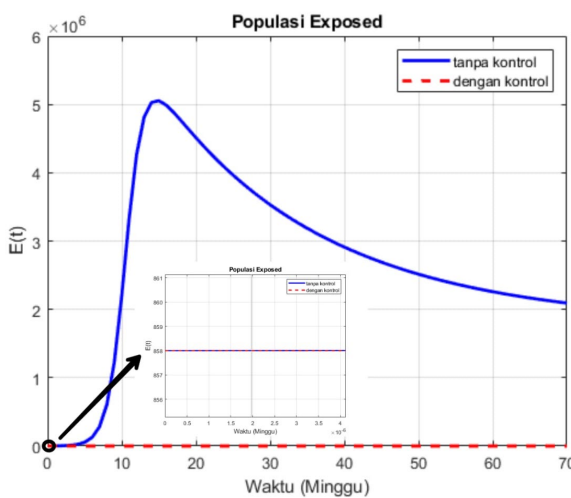
$$\lambda_i^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_*$$



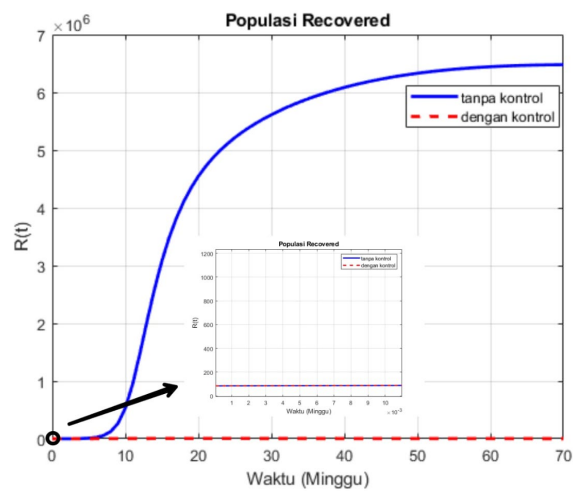
Gambar 1. Grafik Simulasi Perubahan Populasi *Susceptible* Tanpa dan Dengan Kontrol.



Gambar 3. Grafik Simulasi Perubahan Populasi *Infected* Tanpa dan Dengan Kontrol.



Gambar 2. Grafik Simulasi Perubahan Populasi *Exposed* Tanpa dan Dengan Kontrol.



Gambar 4. Grafik Simulasi Perubahan Populasi *Recovered* Tanpa dan Dengan Kontrol.

karena fungsi objektif tidak memiliki bentuk Mayer (S), maka didapat $\lambda_i^{t_f} = 0$ dengan $i = 1, 2, 3, 4$.

F. *Penyelesaian Numerik*

Metode Runge-Kutta merupakan metode penyelesaian numerik yang hanya membutuhkan satu nilai awal. Metode ini dapat digunakan pada sistem persamaan diferensial tingkat satu. Jenis metode Runge-Kutta yang digunakan adalah metode *forward-backward sweep* Runge-Kutta orde empat karena sistem persamaan diferensial pada penelitian ini terdapat persamaan yang diketahui nilai awal dan persamaan lainnya diketahui nilai akhir. Alur pengerjaannya adalah menyelesaikan persamaan yang diketahui nilai awalnya terlebih dahulu secara *forward*, kemudian persamaan lainnya secara *backward*. Secara matematika dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Penyelesaian:

1) *Forward Sweep*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

dengan

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n)$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right)$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_{3,x})$$

2) *Backward Sweep*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

dengan

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n)$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right)$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right)$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_{3,x})$$

Untuk mendapatkan kontrol yang optimal perlu dilakukan penyelesaian secara numerik menggunakan metode *forward-backward sweep* Runge-Kutta orde empat. Hal ini dilakukan

karena persamaan *statenya* adalah $S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$, sedangkan persamaan *costatenya* adalah nilai akhir $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0$.

G. Analisis Hasil Simulasi

Pada pembahasan ini, diberikan kondisi awal dari setiap populasi yaitu $S(0) = 10.560.203, E(0) = 858, I(0) = 943$ dan $R(0) = 84$ sesuai dengan perkembangan kasus COVID-19 di Jakarta pada 7 April 2020. Adapun nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1,44 \times 10^{-7} & \mu &= 1,2 \times 10^{-4} \\ \mu_i &= 0,06 & \omega &= 2.914 \\ \delta &= 0,23 & \beta &= 0,005 \\ \theta &= 0,27 & \sigma &= 0,88 \\ \gamma &= 0,017 & \epsilon &= 0,017 \end{aligned}$$

Dengan nilai parameter di atas, didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $K_0 = (24243 \times 10^3, 0, 0, 0)$. Adapun titik kesetimbangan endemik yaitu $K_e = (446.670, 203.800, 16.157, 597.060)$. Dari pembahasan analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit dapat disimpulkan bahwa sistem bersifat tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya dari pembahasan analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan endemik dapat disimpulkan bahwa sistem bersifat stabil asimtotik lokal di sekitar titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya masing-masing populasi dibuat simulasi perubahan jumlah individu sebelum dan setelah diberikan kontrol *testing* seperti pada Gambar 1, Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut: (1) Model matematika yang telah

dikembangkan adalah sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \omega - \alpha \epsilon ES - \alpha(1 - \epsilon)ES - \mu S + \gamma R$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha \epsilon ES - \beta \sigma E - \theta(1 - \sigma)E - \mu E - uE$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(1 - \epsilon)ES + \beta \sigma E - \mu_i I - \delta I - \mu I + uE$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \theta(1 - \sigma)E - \gamma R - \mu R$$

(2) Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, maka didapatkan kontrol optimal u yang diperoleh dari model matematika penyebaran COVID-19 di Jakarta, yaitu

$$u^* = \frac{\lambda_2 E - \lambda_3 E}{c}$$

dengan $0 \leq u \leq 1$

(3) Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Hasil simulasi menunjukkan keefektifan kontrol dalam mengendalikan penyebaran COVID-19 di Jakarta sehingga dapat mengurangi jumlah individu *exposed* atau individu yang terpapar sebesar 99% dan dengan biaya *testing* yang minimum.

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Zhu *et al.*, "Transmission dynamics and control methodology of covid-19: a modeling study," *Appl. Math. Model.*, vol. 89, 2020, doi: 10.1016/j.apm.2020.08.056.
 [2] S. Annas, M. I. Pratama, M. Rifandi, W. Sanusi, and S. Side, "Stability analysis and numerical simulation of seir model for pandemic Covid-19 spread in Indonesia," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 139, 2020.
 [3] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (Ninth ed.)*. USA: John Willey and Sons Inc, 2009.
 [4] Subiono, *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya: Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2013.