

# Model Optimasi Portofolio Saham dengan Aset Bebas Risiko dan Estimasi Risiko dengan Menggunakan *Expected Shortfall*

Erlyne Nadhilah Widyaningrum, Hariyanto, dan Suhud Wahyudi  
Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)  
e-mail: hariyanto@matematika.its.ac.id

**Abstrak**—Pembentukan suatu portofolio investasi dan pengukuran risiko adalah cara yang dapat dilakukan oleh para investor untuk mengurangi tingkat risiko portofolio investasi. Maka, dalam penelitian ini dilakukan dua hal, yaitu dilakukan pembentukan model optimasi portofolio investasi yang dikembangkan dengan menggunakan teknik *Lagrangian Multiplier* untuk menentukan proporsi aset yang akan diinvestasikan dan melakukan perhitungan estimasi risiko menggunakan *expected shortfall*. Kemudian pada penelitian ini dilakukan perluasan dengan menambahkan aset bebas risiko ke dalam portofolio. Hasil yang diperoleh dari perhitungan proporsi portofolio optimal terdiri dari lima aset saham yaitu saham EXCL = 0.0137, ANTM = 0.3288 TBIG = 0.5032, UNVR = 0.1441 dan CPIN = 0.0102. Sedangkan, portofolio terdiri dari lima aset saham dan satu aset bebas risiko (10%) didapatkan perhitungan proporsi saham EXCL = 0.0136, ANTM = 0.2893 TBIG = 0.4431, UNVR = 0.1433 dan CPIN = 0.0107. Berdasarkan hasil perhitungan *expected shortfall* diperoleh bahwa portofolio investasi dari lima aset saham dengan satu aset bebas risiko dapat meminimalisasi risiko dibandingkan portofolio investasi dari lima aset saham.

**Kata Kunci**—Portofolio Investasi, *Expected Shortfall*, Optimasi, Risiko.

## I. PENDAHULUAN

INVESTASI adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini, dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan di masa datang. Istilah investasi bisa berkaitan dengan berbagai macam aktivitas. Menginvestasikan sejumlah dana pada asset real (tanah, emas, mesin atau bangunan) maupun asset finansial (deposito, saham ataupun obligasi) merupakan aktivitas investasi yang umumnya dilakukan.

Minat investasi di dalam area keuangan (*finance*) cukup menarik minat bagi kebanyakan investor, baik investor lembaga maupun perorangan, hal ini disebabkan oleh perkembangan teknologi dan internet yang memudahkan investor untuk melakukan transaksi investasi. Proses keputusan investasi didasari oleh hubungan antara pengembalian (*return*) yang diperoleh dari hasil investasi yang diharapkan atau biasa disebut ekspektasi *return* dengan risiko suatu investasi. Hubungan ekspektasi *return* dan risiko suatu investasi merupakan hubungan yang linier, yaitu semakin besar tingkat *return* yang diharapkan, maka semakin besar pula risiko yang ditanggung.

Dalam pembentukan portofolio, investor selalu mencari portofolio yang efisien yaitu, portofolio yang menawarkan risiko terendah dengan tingkat return tertentu. Untuk membentuk portofolio, mengetahui perilaku seorang investor dalam pembuatan keputusan investasi yang akan diambilnya sangatlah penting. Sedangkan portofolio optimal adalah portofolio yang dipilih oleh investor dari sekian banyak

pilihan yang ada pada kumpulan portofolio efisien. Jelas bahwa portofolio yang dipilih investor adalah portofolio yang sesuai dengan preferensi investor bersangkutan terhadap return maupun terhadap risiko yang bersedia ditanggungnya. Dalam pemilihan portofolio yang optimal diperlukan adanya kendali optimal dalam optimasi portofolio dalam manajemen investasi. Tujuan dari permasalahan optimasi portofolio ini adalah untuk mendapatkan tambahan modal yang dimiliki oleh investor.

Dalam berinvestasi, investor bisa memilih menginvestasikan dananya baik hanya pada aset risiko atau hanya pada aset bebas risiko, ataupun kombinasi dari kedua aset. Pilihan investor atas aset-aset tersebut, tergantung dari sejauh mana preferensi investor terhadap risiko [1]. Beberapa peneliti menggunakan *Expected Shortfall* sebagai alternatif ukuran risiko dari Value-at-Risk. Pada tahun 2000, Rockafellar pertama kali memperkenalkan *Expected Shortfall* untuk meminimalkannya dalam optimalisasi [2]. Menurut Embrechts (1999) untuk mengukur dan mengelola suatu risiko, diperlukan alat ukur yang dapat digunakan untuk mengukur risiko yang ada. Salah satu alat ukur yang dapat digunakan untuk mengukur risiko adalah *Expected Shortfall* (ES). Secara umum, *Expected Shortfall* didefinisikan sebagai ekspektasi ukuran risiko yang nilainya di atas Value-at-Risk (VaR) [3].

Dari latar belakang tersebut, penelitian yang akan dilakukan adalah melakukan estimasi risiko *Expected Shortfall* untuk menyelesaikan permasalahan dalam optimasi portofolio pada manajemen portofolio investasi saham dan dilakukan perluasan dengan memasukkan aset bebas risiko. Selanjutnya secara numerik dianalisis pula perbandingan antara optimasi portofolio investasi saham dan optimasi portofolio investasi saham dengan aset bebas risiko pada portofolio investasi yang telah ditentukan. Diharapkan penelitian ini bermanfaat untuk menambah literatur model optimasi investasi dan dijadikan sebagai tambahan referensi penelitian lanjutan, serta dijadikan sebagai salah satu alternatif bagi investor dalam melakukan optimasi portofolio investasi.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### A. Aset Risiko dan Bebas Risiko

Dalam berinvestasi, investor bisa memilih menginvestasikan dananya pada berbagai aset, baik aset yang berisiko maupun aset yang bebas risiko, ataupun kombinasi dari kedua aset tersebut. Aset berisiko adalah aset-aset yang tingkat return aktualnya di masa depan masih mengandung ketidakpastian. Sedangkan aset bebas risiko merupakan aset yang tingkat return-nya di masa depan sudah bisa dipastikan

Tabel 1.

Statistik Deskriptif Return Saham EXCL, ANTM, UNVR, TBIG dan CPIN

	EXCL	ANTM	TBIG	UNVR	CPIN
Max	0.248227	0.248366	0.229050	0.193833	0.166271
Min	-	-	-	-	-
$\zeta$	0.090909	0.151020	0.131818	0.069231	0.117647
K	5.69	6.39	8.09	22.81	1.97

Tabel 2.

Ekspektasi Return dan Varian dari Masing Masing Saham

	EXCL	ANTM	TBIG	UNVR	CPIN
EXCL	0.000979	0.000495	0.000293	0.000288	0.000383
ANTM	0.000495	0.001559	0.000430	0.000201	0.000441
TBIG	0.000293	0.000430	0.001109	0.000226	0.000352
UNVR	0.000288	0.000201	0.000226	0.000402	0.000263
CPIN	0.000383	0.000441	0.000352	0.000263	0.001120

Tabel 3.  
Kovarian Antar Saham

No	Kode Saham	Ekspektasi return	Varian
1	EXCL	0.000245	0.000979
2	ANTM	0.002746	0.001559
3	UNVR	0.000534	0.001109
4	TBIG	0.002561	0.000402
5	CPIN	0.000293	0.001120

pada saat ini dan ditunjukkan oleh varian return yang sama dengan nol. Pilihan investor atas aset-aset tersebut akan tergantung dari sejauh mana preferensi investor terhadap risiko. Semakin enggan seorang investor terhadap risiko (risk averse), maka pilihan lebih banyak pada aset yang bebas risiko [1].

**B. Portofolio Optimal**

Portofolio optimal merupakan pilihan dari berbagai sekuritas yang berasal dari portofolio efisien. Portofolio optimal dapat ditentukan dengan memilih tingkat ekspektasi return tertentu dan menentukan nilai tingkat risiko minimum, atau memaksimalkan return ekspektasi nya dan menentukan tingkat risiko tertentu.

Untuk pemilihan portofolio efisien menurut Ruppert (2004) dapat dilakukan dengan cara memaksimalkan nilai portofolio sebagai berikut [4]:

Maksimumkan:

$$2\tau\mu_p - \sigma_p^2$$

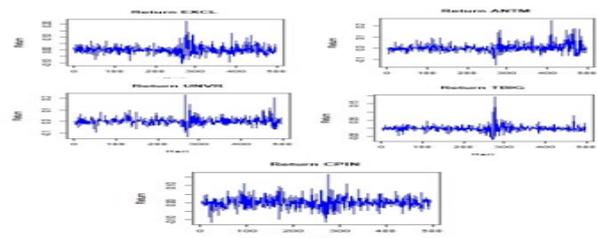
dengan syarat:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

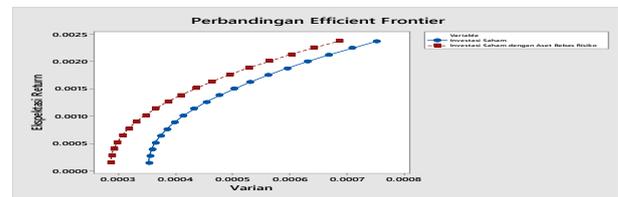
$$\tau \geq 0,$$

**C. Tingkat Return Saham**

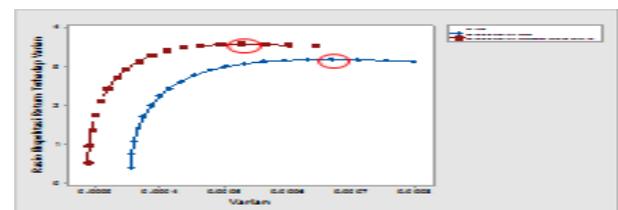
Tingkat pengembalian aset (Return on Asset) adalah rasio keuangan perusahaan yang terkait dengan potensi keuntungan mengukur kekuatan perusahaan membuahakan keuntungan atau juga laba pada tingkat pendapatan, aset dan juga modal saham spesifik [5]. Terdapat dua jenis return dalam manajemen investasi, yaitu return yang telah terjadi (realized return) yang dihitung berdasarkan data historis dan return yang diharapkan (ekspektasi return) oleh investor di



Gambar 1. Plot time series return saham EXCL, ANTM, UNVR, TBIG dan CPIN.



Gambar 2. Perbandingan efficient frontier.



Gambar 3. Perbandingan rasio portofolio investasi.

masa yang akan datang [6]. Return suatu saham dapat dihitung berdasarkan historis menggunakan rumus sebagai berikut [6]:

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}}$$

Dengan ekspektasi return saham:

$$E(R) = \frac{\sum_{i=1}^n R_{i,t}}{n}$$

**D. Tingkat Return Portofolio**

Portofolio adalah kumpulan dari instrument investasi yang dibentuk untuk memnuhi suatu sasaran umum investasi, jika seorang investor berkeinginan untuk memaksimalkan keuntungan yang diharapkan maka dana sebaiknya diletakkan dalam sekuritas yang mempunyai harapan keuntungan yang maksimum [7]. Jumlah proporsi dari investasi ( $W_i, i = 1, \dots, n$ ) pada suatu portofolio sama dengan satu, atau jika ditulis secara matematis [8]:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Untuk rumus return portofolio adalah:

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + \dots + w_nR_n = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

Selain perhitungan proporsi masing masing, perhitungan ekspektasi return juga diperlukan sebagai tingkat keuntungan yang diharapkan dari masing masing saham pada portofolio [4-5]. Perhitungan e kspektasi return dilakukan menggunakan rumus:

$$\mu_p = E[R_p] = w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + \dots + w_nE(R_n)$$

Tabel 4.  
Hasil Simulasi Perhitungan Proporsi pada Portofolio Investasi Saham Menggunakan Program *Matlab*

No	$\tau$	EXCL	ANTM	TBIG	UNVR	CPIN	$w^T e$
1	0.00	0.0624	0.0664	0.1127	0.6889	0.0697	1
2	0.01	0.0593	0.0828	0.1371	0.6548	0.0659	1
3	0.02	0.0563	0.0992	0.1615	0.6208	0.0622	1
4	0.03	0.0533	0.1156	0.1859	0.5867	0.0585	1
5	0.04	0.0502	0.1320	0.2103	0.5527	0.0548	1
6	0.05	0.0472	0.1484	0.2347	0.5186	0.0511	1
7	0.06	0.0441	0.1648	0.2591	0.4846	0.0474	1
8	0.07	0.0411	0.1812	0.2835	0.4505	0.0436	1
9	0.08	0.0380	0.1976	0.3079	0.4165	0.0399	1
10	0.09	0.0350	0.2140	0.3323	0.3825	0.0362	1
11	0.10	0.0320	0.2304	0.3568	0.3484	0.0325	1
12	0.11	0.0289	0.2468	0.3812	0.3144	0.0288	1
13	0.12	0.0259	0.2632	0.4056	0.2803	0.0251	1
14	0.13	0.0228	0.2796	0.4300	0.2463	0.0214	1
15	0.14	0.0198	0.2960	0.4544	0.2122	0.0176	1
16	0.15	0.0168	0.3124	0.4788	0.1782	0.0139	1
17	0.16	0.0137	0.3288	0.5032	0.1441	0.0102	1
18	0.17	0.0107	0.3452	0.5276	0.1101	0.0065	1
19	0.18	0.0076	0.3616	0.5520	0.0760	0.0028	1
20	0.19	0.0046	0.3780	0.5764	0.0420	-0.0009	1

Tabel 5.  
Hasil Simulasi Perhitungan Proporsi pada Portofolio Investasi Saham dengan Aset Bebas Risiko Menggunakan Program *Matlab*

No	$\tau$	EXCL	ANTM	TBIG	UNVR	CPIN	$w_0 + w^T e$
1	0.00	0.0561	0.0598	0.1014	0.6200	0.0627	1
2	0.01	0.0531	0.0762	0.1258	0.5859	0.0590	1
3	0.02	0.0501	0.0925	0.1503	0.5519	0.0553	1
4	0.03	0.0470	0.1089	0.1747	0.5178	0.0515	1
5	0.04	0.0440	0.1253	0.1991	0.4838	0.0478	1
6	0.05	0.0409	0.1417	0.2235	0.4498	0.0441	1
7	0.06	0.0379	0.1581	0.2479	0.4157	0.0404	1
8	0.07	0.0348	0.1745	0.2723	0.3817	0.0367	1
9	0.08	0.0318	0.1909	0.2967	0.3476	0.0330	1
10	0.09	0.0288	0.2073	0.3211	0.3136	0.0292	1
11	0.10	0.0257	0.2237	0.3455	0.2795	0.0255	1
12	0.11	0.0227	0.2401	0.3699	0.2455	0.0218	1
13	0.12	0.0196	0.2565	0.3943	0.2114	0.0181	1
14	0.13	0.0166	0.2729	0.4187	0.1774	0.0144	1
15	0.14	0.0136	0.2893	0.4431	0.1433	0.0107	1
16	0.15	0.0105	0.3057	0.4675	0.1093	0.0070	1
17	0.16	0.0075	0.3221	0.4919	0.0752	0.0032	1
18	0.17	0.0044	0.3385	0.5163	0.0412	-0.0005	1

Tabel 6.  
Hasil Perhitungan Expected Shortfall dari Saham EXCL, ANTM, TBIG, UNVR, CPIN

EXCL	ANTM	TBIG	UNVR	CPIN	$w_0$	ES (95%)
0.0138	0.3281	0.5017	0.1456	0.0108	0	0.0345
0.0136	0.2888	0.4418	0.1446	0.0112	0.1	0.0306

Tabel 7.  
Hasil Perhitungan Expected Shortfall dari *Portofolio Investasi*

	EXCL	ANTM	TBIG	UNVR	CPIN
$\phi^{-1}(\alpha)$	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65
$F_{CF}^{-1}(\alpha)$	-0.62355	-0.83165	-1.64956	-8.15763	0.90650
$ES_{1-\alpha}$	0.085158	0.081907	0.011339	0.000534	0.059222

$$= w_1 \bar{R}_1 + w_2 \bar{R}_2 + \dots + w_n \bar{R}_n = \sum_{i=1}^n w_i \bar{R}_i$$

E. *Expected Shortfall*

Expected Shortfall pada tingkat kepercayaan  $(1 - \alpha)$  dinotasikan oleh  $ES_{1-\alpha}(R)$  dan difinisikan sebagai nilai ekspektasi return yang sama atau lebih besar dari  $V_{1-\alpha}$  yang dapat ditulis sebagai berikut [9]:

$$ES_{1-\alpha}(R) = E(R | R \geq V_{1-\alpha}(R))$$

$$ES_{1-\alpha}(R) = \int_{V_{1-\alpha}}^{\infty} x \frac{f(x)}{P(R \geq V_{1-\alpha})} dx$$

$$ES_{1-\alpha}(R) = \int_{V_{1-\alpha}}^{\infty} x \frac{f(x)}{\alpha} dx$$

$$ES_{1-\alpha}(R) = \frac{1}{\alpha} \int_{V_{1-\alpha}}^{\infty} x f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Tabel 8.  
Nilai Kovarian Return Saham-Return Market dan Beta Saham

	$Cov(R_i, R_m)$	$\sigma_m^2$	$\beta_i$
EXCL	0.000383	0.000172	2.23
ANTM	0.000441	0.000172	2.56
TBIG	0.000352	0.000172	2.04
UNVR	0.000263	0.000172	1.53
CPIN	0.001120	0.000172	6.51

Tabel 9.  
Perhitungan Indeks Treynor pada Portofolio Investasi Saham

No	Portofolio Investasi	$\beta_p$	Treynor
1	Saham	2.187	0.000247
2	Saham dengan Aset Bebas Risiko	1.966	0.000154

Sehingga, Model Expected Shortfall untuk  $X \sim N(0,1)$  dengan  $\alpha \in (0,1)$  dapat ditulis secara matematis sebagai berikut [9]:

$$ES_{1-\alpha} = \mu + \sigma \left( \frac{1}{\alpha} \int_{v_{1-\alpha}}^{\infty} x f(x) dx \right)$$

$$ES_{1-\alpha} = \mu + \sigma \left( \frac{1}{\alpha} \int_{v_{1-\alpha}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right] x dx \right)$$

$$ES_{1-\alpha} = \mu + \sigma \left( \frac{1}{\alpha} \left[ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{v_{1-\alpha}}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right] x dx \right] \right)$$

$$ES_{1-\alpha} = \mu + \sigma \left( \frac{1}{\alpha} \left[ \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right] \right]_{v_{1-\alpha}}^a \right)$$

$$ES_{1-\alpha} = \mu + \sigma \left( \frac{1}{\alpha} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right] \right]_{v_{1-\alpha}}^{\infty} \right)$$

Data keuangan sering menunjukkan sifat *skewness* dan kurtosis berlebih (leptokurtis) yang menunjukkan penyimpangan dari normalitas. Dengan *Skewness* dan kelebihan kurtosis maka diperlukan untuk menggunakan *Cornish-Fisher Expansion* dalam menghitung ES diperoleh rumusan sebagai berikut:

$$F_{CF}^{-1}(\alpha) = \phi^{-1}(\alpha) + \frac{\zeta}{6}([\phi^{-1}(\alpha)]^2 - 1) + \frac{k-3}{24}([\phi^{-1}(\alpha)]^3 - 3\phi^{-1}(\alpha)) - \frac{\zeta^2}{36}(2[\phi^{-1}(\alpha)]^3 - 5\phi^{-1}(\alpha))$$

Sehingga ES pada persamaannya dapat dijabarkan menjadi:

$$ES_{1-\alpha} = \mu + \frac{\sigma}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(F_{CF}^{-1}(\alpha))^2}{2}}$$

Keterangan:

$ES_{1-\alpha}$  : Expected Shortfall tingkat kepercayaan  $(1 - \alpha)$

$\mu$  : Rat a rata dari return Saham

$\sigma$  : Nilai standar deviasi dari return saham

$\zeta$  : Skewness

$k$  : Kurtosis

$\phi^{-1}(\alpha)$ : Kuantil  $\alpha$  dari distribusi normal ( $Z_\alpha$ )

#### F. Metode Pengali Lagrange

Metode Lagrange merupakan suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan fungsi objektif dari suatu

permasalahan yang langsung dikaitkan dengan fungsi kendalanya. Misalnya untuk mencari ekstrim suatu fungsi  $f$  satu variabel, terhadap satu kendala  $g(x_1) = 0$  persamaan Lagrangian nya adalah [10]:

$$LL(x_1, \lambda) = f(x_1) + \lambda g(x_1), \quad g(x_1) = 0$$

Suatu solusi optimal dari masalah optimasi dengan multivariabel dapat ditentukan dengan memenuhi syarat perlu dan syarat cukup keoptimalan yaitu sebagai berikut [10]:

#### 1) Syarat Perlu

Jika  $f(x)$  memiliki nilai ekstrim (maksimum atau minimum) pada  $x = x^*$  dan jika turunan parsial pertama dari  $f(x)$  ada pada  $x^*$  maka,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x^*) = 0$$

#### 2) Syarat Cukup

Syarat Cukup untuk titik stasioner  $x^*$  menjadi nilai ekstrim adalah matriks Hessian dimana setiap elemennya dibentuk dari turunan parsial kedua dari  $f(x)$  dievaluasi pada  $x^*$  sebagai berikut:

- a) Definit positif ketika  $x^*$  adalah titik minimum global
- b) Definit negatif ketika  $x^*$  adalah titik maksimum global

Diberikan  $H$  matriks persegi  $n \times n$ , berlaku: (a) Matriks  $H$  disebut definit positif  $\leftrightarrow \forall$  nilai eigen ( $\lambda$ ) bernilai positif. (b) Matriks  $H$  disebut definit negatif  $\leftrightarrow \forall$  nilai eigen ( $\lambda$ ) bernilai negatif. Dengan  $|\lambda I - H| = 0$ . Dimana matriks Hessian dari  $f(x)$  adalah:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}$$

#### G. Indeks Treynor

Treynor sebagai salah satu indeks yang digunakan untuk mengukur kinerja portofolio, Indeks Treynor mengamsumsikan bahwa portofolio sudah terdiversifikasi dengan baik atau dikenal dengan istilah *Reward to Volatility Ratio (RVOR)* sehingga risiko yang dianggap relevan adalah risiko sistematis (yang diukur dengan beta). Indeks kinerja Treynor dihitung dengan formula berikut:

$$T_p = \frac{R_p - R_f}{\beta_p}$$

dengan,

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^N (R_{i,j} - E(R_i))(R_{m,j} - E(R_m)) / n}{\sigma_m^2}$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i$$

Keterangan:

$T_p$  : Indeks kinerja Treynor

$R_p$  : Return portofolio

$R_f$  : Return bebas risiko

$\beta_p$  : Beta portofolio

$x_i$  : Proporsi saham ke- $i$   
 $\beta_i$  : Beta Saham ke- $i$   
 $n$  : Banyaknya Data

### III. METODOLOGI PENELITIAN

#### A. Sumber Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data harga penutupan saham (closing price) dari lima perusahaan yang terdaftar pada IDX30 dengan periode 1 Maret 2019 sampai dengan 1 Maret 2021. Lima perusahaan tersebut dipilih dengan kriteria Price Earning Ratio (PER) yang tertinggi. Data-data tersebut diperoleh dari <https://finance.yahoo.com/>. Kemudian, data investasi aset bebas risiko yang digunakan adalah nilai fixed return sebesar 8.25 % dari obligasi dengan kode seri ORI015.

#### B. Perhitungan Return, Ekspektasi Return, Varian dan Kovarian Saham

Setelah dilakukan pemilihan 5 data saham dengan kriteria nilai PER (Price Earning Ratio) tertinggi maka akan dilakukan perhitungan return masing masing saham. Selanjutnya menghitung ekspektasi return, varian dan kovarian saham dari masing-masing saham perusahaan dalam objek penelitian ini.

#### C. Pembentukan Model Portofolio Investasi Saham dan Dengan Aset Bebas Risiko

Pembentukan portofolio investasi dengan menerapkan pengali lagrange untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal pada optimasi portofolio saham. Selanjutnya, akan dilakukan perluasan dengan menambahkan aset bebas risiko sehingga menghasilkan model portofolio saham dengan aset bebas risiko.

#### D. Optimasi Portofolio Investasi

Akan dilakukan optimasi berdasarkan persamaan dari proporsi saham yang sudah ditemukan dari proses pengali lagrange dengan bantuan software Matlab. Proses optimasi terus berjalan dengan menggunakan toleransi risiko  $\tau \geq 0$ .

#### E. Perhitungan Kinerja Portofolio

Melakukan perhitungan Indeks Treynor sebagai tolak ukur pengukuran kinerja portofolio investasi saham dan porotofolio saham dengan aset bebas risiko.

### IV. ANALISA DAN PEMBAHASAN

#### A. Identifikasi Data

Setelah dilakukan perhitungan Price Earning Ratio (PER) untuk mem ilih lima saham yang akan dijadikan objek penelitian. Maka, dapat ditentukan lima saham yang akan dijadikan objek penelitian pada penelitian ini yaitu saham EXCL, ANTM, UNVR, TBIG dan CPIN. Hasil perhitungan return harian dari lima perusahaan pada periode Maret 2019 – Maret 2021 dapat dilihat melalui plot return saham EXCL, ANTM, UNVR, TBIG dan CPIN yang mengalami fluktuasi dari waktu ke waktu pada Gambar 1.

Kemudian, data return masing-masing saham dianalisis menggunakan statistika deskriptif untuk mengetahui

gambaran umum data return. Berikut merupakan hasil dari statistik deskriptif dari saham EXCL, ANTM, TBIG, UNVR dan CPIN dengan menggunakan bantuan SPSS pada Tabel 1.

Dari Tabel 1 didapatkan nilai skewness maupun kurtosis dari kelima saham yang menunjukkan penyimpangan dari distribusi normal. Sehingga, nantinya untuk menghitung expected shortfall akan menggunakan ekspansi Cornish-Fisher dengan memasukkan nilai skewness maupun kurtosis yang diperoleh.

#### B. Perhitungan Ekspektasi Return, Varian dan Kovarian Saham

Dari lima saham terpilih, selanjutnya dengan menggunakan bantuan software Excel ditentukan ekspektasi return, varian pada Tabel 2. Sedangkan untuk perhitungan kovarian disajikan pada Tabel 3.

#### C. Pembentukan Model Portofolio Investasi Saham

Misalkan  $w_i$  menyatakan proporsi (bobot) asset yang diinvestasikan pada saham dalam pembentukan portofolio, dengan demikian ekpektasi return portofolio diperoleh sebagai berikut:

$$\mu_p = E[R_p] = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}$$

Dan varian portofolio dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = E [(R_p - \overline{R_p})^2] = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}$$

Untuk mendapatkan portofolio optimal, maka dilakukan substitusi ke dalam persoalan optimisasi portofolio sebagai berikut:

Maksimumkan:

$$2\tau \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}$$

dengan syarat:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{e} = 1 = \mathbf{e}^T \mathbf{w}$$

$$\tau \geq 0$$

Selanjutnya, dapat dibentuk fungsi lagrange dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = (2\tau \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}) + \lambda(\mathbf{w}^T \mathbf{e} - 1)$$

dengan menggunakan syarat perlu teorema Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = 2\tau \boldsymbol{\mu} - 2\mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda \mathbf{e} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathbf{w}^T \mathbf{e} - 1 = 0$$

Persamaan dikalikan  $\mathbf{V}^{-1}$  dan dinyatakan ke dalam bentuk  $\mathbf{w}$  sehingga menjadi sebagai berikut:

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{e} \mathbf{V}^{-1} + \tau \boldsymbol{\mu} \mathbf{V}^{-1}$$

Persamaan di atas dikalikan dengan  $\mathbf{e}^T$ , setelah dilakukan penyelesaian didapat sebagai berikut:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{e} + \tau \mathbf{e}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

Maka diperoleh besarnya nilai  $\frac{\lambda}{2} = \frac{1-\tau e^T V^{-1} \mu}{e^T V^{-1} e}$ , dan jika nilai  $\frac{\lambda}{2}$  disubstitusikan ke dalam persamaan di atas, maka diperoleh persamaan  $w$  sebagai berikut:

$$w = \tau \left[ V^{-1} \mu - \left( \frac{\tau e^T V^{-1} \mu}{e^T V^{-1} e} \right) V^{-1} e \right] + \left( \frac{1}{e^T V^{-1} e} \right) e V^{-1}$$

*D. Pembentukan Model Portofolio Investasi Saham Dengan Aset Bebas Risiko*

Misalkan investor dalam pembentukan portofolio investasi, menyisihkan sebagian proporsi modalnya sebesar  $w_0$  untuk diinvestasikan pada aset bebas risiko, dimana aset bebas risiko tersebut memberikan return tetap sebesar  $r_0$  per satuan waktu.

Dengan demikian *return* portofolio dengan aset bebas risiko diperoleh sebagai berikut:

$$r_p = w_0 R_0 + \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

Sehingga, ekspektasi return portofolio dengan aset bebas risiko diperoleh sebagai berikut:

$$\mu_p = \overline{R_p} = E[R_p] = w_0 \mu_0 + w^T \mu$$

Dan varian portofolio dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = E[(R_p - \overline{R_p})^2] = w^T V w$$

Untuk mendapatkan portofolio optimal, maka persamaan di atas di substitusi ke dalam persoalan optimisasi portofolio sebagai berikut:

Maksimumkan:

$$2\tau w_0 \mu_0 + w^T \mu - w^T V w$$

dengan syarat:

$$w^T e = 1 = e^T w$$

$$\tau \geq 0,$$

Selanjutnya, dapat dibentuk fungsi lagrange dari masalah optimisasi tersebut dimana  $\lambda$  merupakan pengali lagrange dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = (2\tau w_0 \mu_0 + w^T \mu - w^T V w) + \lambda(w^T e - 1)$$

dengan menggunakan syarat perlu teorema Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 2\tau \mu - 2Vw + \lambda e = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w_0 + w^T e - 1 = 0$$

Persamaan di atas dikalikan  $V^{-1}$  dan dinyatakan ke dalam bentuk  $w$  sehingga menjadi sebagai berikut:

$$w = \frac{\lambda}{2} e V^{-1} + \tau \mu V^{-1}$$

Persamaan di atas dikalikan dengan  $e^T$ , setelah dilakukan penyelesaian didapat sebagai berikut:

$$e^T w = \frac{\lambda}{2} e^T V^{-1} e + \tau e^T V^{-1} \mu$$

Persamaan  $e^T w = w^T e = 1 - w_0$  jika disubstitusikan ke persamaan, maka diperoleh besarnya nilai  $\frac{\lambda}{2} = \frac{1-w_0-\tau e^T V^{-1} \mu}{e^T V^{-1} e}$ , dan diperoleh persamaan  $w$  sebagai berikut:

$$w = \tau \left[ V^{-1} \mu - \left( \frac{\tau e^T V^{-1} \mu}{e^T V^{-1} e} \right) V^{-1} e \right] + \left( \frac{1}{e^T V^{-1} e} \right) e V^{-1} - \left( \frac{w_0}{e^T V^{-1} e} \right) e V^{-1}$$

*E. Proses Optimasi Portofolio Investasi*

Kemudian, persamaan akan disimulasikan dengan menggunakan bantuan software Matlab untuk menghasilkan kombinasi proporsi portofolio investasi saham. Proses optimasi akan dihentikan apabila terdapat salah satu nilai  $w$  yang bernilai negatif.

Setiap nilai proporsi yang diperoleh, digunakan untuk menghitung ekspektasi return portofolio dan menghitung varian. Kemudian rasio terbesar antara ekspektasi return terhadap varian portofolio digunakan untuk memilih portofolio optimal dan diperoleh rasio terbesar yaitu 3.17195 pada iterasi ke 17 dengan proporsi investasi saham EXCL = 0.0137, ANTM = 0.3288 TBIG = 0.5032, UNVR = 0.1441 dan CPIN = 0.0102.

Setiap nilai proporsi yang diperoleh digunakan untuk menghitung ekspektasi return portofolio dan menghitung varian. Kemudian rasio terbesar antara ekspektasi return terhadap varian portofolio digunakan untuk memilih portofolio optimal dan diperoleh rasio terbesar yaitu 3.56691 dengan proporsi investasi saham EXCL = 0.0136, ANTM = 0.2893, TBIG = 0.4431, UNVR = 0.1433 dan CPIN = 0.0107 (Tabel 4 dan Tabel 5).

*F. Perhitungan Estimasi Risiko Expected Shortfall*

Dalam perhitungan digunakan Cornish-Fisher Expansion, karena skewness dan kurtosis yang menunjukkan penyimpangan dari normalitas. Tingkat kepercayaan yang digunakan untuk menghitung ES adalah sebesar 95% dengan return 497 hari transaksi. Hasil perhitungan expected shortfall untuk masing masing saham dapat dilihat pada Tabel 6.

Setelah itu, perhitungan expected shortfall pada Tabel 6 akan di kalikan dengan proporsi investasi saham yang telah diperoleh dari proses simulasi sebelumnya. Perhitungan expected shortfall dari tiap portofolio dapat dirangkum pada Tabel 7.

Dari Tabel 7 diatas diperoleh nilai expected shortfall pada portofolio investasi saham optimal yang telah dipilih yaitu 0,0345, artinya apabila dimisalkan untuk investor melakukan investasi sebesar Rp. 2.000.000.000 yang berarti bahwa pada tingkat kepercayaan 95% seorang investor yang menginvestasikan uangnya dalam portofolio saham yang terdiri dari saham EXCL, ANTM, TBIG, UNVR dan CPIN akan mengalami kerugian maksimal sebesar Rp 68.902.285.

Sedangkan, dengan menambahkan aset bebas risiko diperoleh nilai expected shortfall pada portofolio investasi saham dengan aset bebas risiko optimal yang telah dipilih yaitu 0.0306, artinya apabila dimisalkan untuk investor melakukan investasi sebesar Rp. 2.000.000.000 dengan tingkat kepercayaan 95% yang berarti bahwa pada tingkat keyakinan 95% seorang investor yang menginvestasikan uangnya dalam portofolio saham yang terdiri dari saham EXCL, ANTM, TBIG, UNVR, CPIN dan saatu aset bebas

risiko (obligasi) akan mengalami kerugian maksimal sebesar Rp 61.114.753.

### G. Kinerja Portofolio

Dalam mengevaluasi kinerja portofolio, pada penelitian ini menggunakan Indeks Treynor atau sering disebut sebagai Reward to Volatility Ratio (RVOR), menggunakan beta sebagai tolak ukur risiko. Beta menunjukkan besar kecilnya perubahan return suatu portofolio saham terhadap perubahan market return karena pada umumnya fluktuasi harga saham dipengaruhi oleh fluktuasi pasar. Perhitungan beta saham dirangkum melalui Tabel 8.

Setelah mendapatkan beta dari masing masing saham selanjutnya dilakukan perhitungan beta portofolio yang digunakan untuk menghitung Indeks Treynor, didapatkan hasil perhitungan Indeks Treynor pada Tabel 9.

Menurut pengukuran Treynor, semakin tinggi nilai indeksnya berarti semakin baik. Kinerja portofolio Berdasarkan Tabel 9 diperoleh portofolio saham dengan aset bebas risiko memiliki indeks treynor sebesar 0.000154 dan portofolio investasi saham memiliki indeks treynor sebesar 0.000247.

Setiap pasangan antara ekspektasi return dan varian portofolio dapat membentuk sebuah titik portofolio efisien. Himpunan titik-titik portofolio efisien tersebut digunakan untuk membentuk grafik permukaan efisien (eficient frontier) dari masing masing model portofolio investasi pada Gambar 2. Selain itu, dapat dibentuk kurva perbandingan pada rasio ekspektasi return terhadap varian dari kedua portofolio seperti pada Gambar 3.

Jika memperhatikan Gambar 3, maka tampak bahwa kurva portofolio dengan aset bebas risiko lebih tinggi dibandingkan portofolio saham. Dalam hal ini menggambarkan bahwa rasio antara ekspektasi return terhadap varian yang dimiliki oleh portofolio dengan aset bebas risiko lebih besar dibandingkan pada portofolio saham.

## V. KESIMPULAN

Hasil penerapan model optimasi yang dibentuk melalui pengali Lagrange menghasilkan proporsi portofolio optimal untuk portofolio investasi yang terdiri dari lima saham

dengan proporsi saham EXCL = 0.0137, ANTM = 0.3288 TBIG = 0.5032, UNVR = 0.1441 dan CPIN = 0.0102. Sedangkan proporsi portofolio optimal yang terdiri dari lima aset saham dan satu aset bebas risiko (10%) yaitu dengan proporsi saham EXCL = 0.0136, ANTM = 0.2893 TBIG = 0.4431, UNVR = 0.1433 dan CPIN = 0.0107.

Penilaian kinerja portofolio investasi dihasilkan Indeks Treynor pada portofolio investasi yang terdiri dari lima saham dan satu aset bebas risiko (10%) sebesar 0.000154 dengan nilai estimasi risiko expected shortfall sebesar Rp 61.114.753. Sedangkan, pada portofolio investasi yang terdiri dari lima saham memiliki Indeks Treynor sebesar 0.000247 dengan estimasi risiko expected shortfall sebesar Rp 68.902.285. Berdasarkan estimasi risiko expected shortfall yang diperoleh menunjukkan bahwa portofolio investasi yang mengkombinasikan dengan aset bebas risiko dapat meminimalisasi jumlah kerugian dibandingkan dengan portofolio investasi tanpa aset bebas risiko yang hanya menginvestasikan pada saham.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] E. Tandililin, *Portofolio dan Investasi: Teori dan Aplikasi*, 1st ed. Yogyakarta: Kanisius, 2010.
- [2] R. T. Rockafellar, S. Uryasev, and others, "Optimization of conditional value-at-risk," *J. risk*, vol. 2, pp. 21–42, 2000.
- [3] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann, "Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls," *Risk Manag. value risk beyond*, vol. 1, pp. 176–223, 2002.
- [4] D. Ruppert, *Statistics and Finance: An Introduction*, 1st ed. New York: Springer-Verlag, 2014.
- [5] N. Fadilah, "Optimisasi Portofolio Mean-Expected Shortfall (Mean-ES) pada Saham Sektor Energi dan Pertambangan," Universitas Padjajaran, 2020.
- [6] J. Hartono, *Teori Portofolio dan Analisis Investasi*, 11th ed. Jakarta: BPFE, 2017.
- [7] H. Markowitz, J. Guerard, G. Xu, and B. Beheshti, "Financial anomalies in portfolio construction and management," *J. Portf. Manag.*, vol. 47, no. 6, pp. 51–64, 2021.
- [8] F. Caccioli, I. Kondor, and G. Papp, "Portfolio optimization under expected shortfall: Contour maps of estimation error," *Quant. Financ.*, vol. 18, no. 8, pp. 1295–1313, 2018.
- [9] Y. Saepudin, H. Yasin, and R. Santoso, "Analisis risiko investasi saham tunggal syariah dengan Value at Risk (VaR) dan Expected Shortfall (ES)," *J. Gaussian*, vol. 6, no. 2, pp. 271–280, 2017.
- [10] D. Luknanto, *Pengantar Optimasi Non Linier*, 1st ed. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada, 2000.