

# Kontrol *Tracking Fuzzy-Optimal* untuk Sistem Pendulum-Kereta

Adenia Rahma Putri dan Trihastuti Agustinah

Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111

*E-mail:* trihastuti@elect-eng.its.ac.id

**Abstrak**—Sistem pendulum-kereta memiliki karakteristik yang tidak stabil dan nonlinear. Makalah ini membahas desain sistem kontrol *tracking* pada sistem pendulum-kereta dengan metode kontrol *Fuzzy-Optimal* agar sistem pendulum kereta mampu bergerak mengikuti sinyal referensi dengan tetap mempertahankan batang pendulum dalam posisi terbaliknya. Sinyal referensi yang digunakan adalah sinyal *step*, *square-wave* dan sinus. Model nonlinear sistem pendulum-kereta direpresentasikan dalam model *fuzzy Takagi-Sugeno* untuk beberapa titik kerja, kemudian kontroler *state feedback* disusun dengan konsep *Parallel Distributed Compensation (PDC)* menggunakan teknik kontrol optimal. Hasil simulasi serta implementasi menunjukkan bahwa sistem pendulum-kereta mampu mengikuti sinyal referensi dan tetap mempertahankan sudut pendulum di sekitar 0 rad.

**Kata Kunci**—*Fuzzy-optimal kontrol, model fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), tracking, sistem pendulum-kereta.*

## I. PENDAHULUAN

SISTEM pendulum-kereta merupakan sistem yang tidak stabil dan nonlinear, sehingga untuk mengontrolnya diperlukan teknik kontrol yang tidak mudah dibandingkan dengan teknik kontrol pada sistem yang linear dan stabil. Secara umum sistem pendulum-kereta banyak digunakan sebagai *plant* nyata dalam suatu sistem kontrol. Sistem kontrol dibutuhkan untuk menstabilkan dan membuat batang pendulum pada posisi equilibriumnya yaitu pada sudut nol radian. Sistem pendulum-kereta memiliki beberapa permasalahan kontrol diantaranya *swing-up*, stabilisasi dan *tracking* [1].

*Swing-up* merupakan kondisi sistem pendulum-kereta dalam mengayunkan batang pendulum dari posisi menggantung menjadi terbalik. Selanjutnya kondisi sistem pendulum-kereta dalam mempertahankan posisi batang pendulum dalam keadaan terbalik disebut dengan stabilisasi. Sedangkan untuk *tracking*, kereta di kontrol agar mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan mempertahankan batang pendulum pada posisi terbalik.

Persoalan *tracking* pada sistem pendulum-kereta tersebut telah banyak diselesaikan menggunakan berbagai macam metode. Metode kontrol *fuzzy Takagi-Sugeno* sudah banyak digunakan pada sistem pendulum-kereta dan berhasil diterapkan pada permasalahan kontrol *tracking* [2]. Permasalahan *tracking* juga bisa diselesaikan melalui pendekatan *Linear Matrix Inequality (LMI)* seperti pada [3].

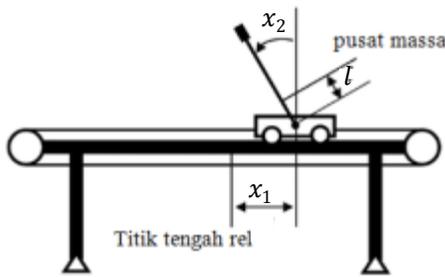
Permasalahan *tracking* juga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode kontrol optimal yaitu *Linear Quadratic Tracking (LQT)*. Metode kontrol optimal ini juga berbasis *fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)*. Model *fuzzy T-S* digunakan untuk membentuk *plant* pendulum. Masing-masing ruang state yang berbeda pada model *fuzzy* dinyatakan dalam model linear. Model sistem secara keseluruhan dicapai melalui kontrol *fuzzy* dari model linear. Hasil desain kontroler akan diuji melalui simulasi dan percobaan pada *plant* nyata pendulum. Berdasarkan hasil pengujian diperoleh bahwa sistem dapat mengontrol kereta bergerak mengikuti sinyal referensi dan mempertahankan kestabilan batang pendulum pada posisi terbalik [4].

Pada makalah ini akan dilakukan perancangan kontrol *tracking* dengan menggunakan metode kontrol optimal yaitu LQT dengan *fuzzy T-S* dimana sinyal referensi yang digunakan adalah sinyal *step*, *square-wave* dan sinus. Hasil yang diharapkan dari metode ini adalah meminimalisasi kesalahan performansi *tracking* sekecil mungkin sehingga akan didapatkan keluaran yang diinginkan berhasil mengikuti sinyal referensi yang diberikan.

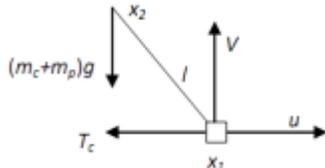
Simulasi dan Implementasi dilakukan untuk menguji desain dari teori kontrol tersebut. Simulasi dilakukan dengan simulink MATLAB. Implementasi dilakukan dengan menggunakan simulink MATLAB dan *Real Time Workshop-Real Time Windows Target*.

## II. MODEL MATEMATIKA

Sistem pendulum-kereta merupakan modul percobaan dari *Feedback Instrumentation®* yang digunakan untuk mendemonstrasikan pengendalian sistem *Single Input Multiple Output (SIMO)*. Untuk lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 1. Tersusun atas sebuah kereta yang dapat bergerak pada suatu trek dengan sumbu horizontal, dan sepasang batang pendulum berputar pada porosnya dari bawah ke atas sepanjang rel yang tersedia pada modul. Motor DC menggerakkan kereta pada Sistem Pendulum Kereta yang dihubungkan melalui *belt*. Sensor posisi mendeteksi posisi kereta pada trek melalui *positional encoder* dan *limit switch*. *Limit switch* digunakan sebagai penahan kereta supaya tidak keluar lintasan pada akhir trek. *Angle encoder* memantau posisi sudut batang pendulum.



Gambar. 1. Diagram Fisik Sistem Pendulum Kereta.



Gambar. 2. Gaya-gaya pada Sistem Pendulum Kereta.

Seperti yang ada pada Gambar 2 gaya-gaya yang bekerja pada bidang horizontal adalah gaya kontrol  $u$  dan gaya gesek  $T_c$ . Massa keseluruhan sistem ( $m$ ) adalah jumlah massa kereta ( $m_c$ ) dan massa pendulum ( $m_p$ ). Gaya-gaya yang bekerja pada bidang vertikal adalah gaya normal  $V$  dan gaya berat sistem, yaitu  $(m_c + m_p)g$ . Sistem pendulum-kereta memiliki empat state yaitu  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$ . Dengan  $x_1$  adalah posisi kereta (jarak terhadap pusat lintasan),  $x_2$  adalah jarak sudut antara vertikal tegak dengan jatuhnya posisi batang pendulum,  $x_3$  adalah kecepatan kereta dan  $x_4$  adalah kecepatan sudut batang pendulum.

Model matematika dalam bentuk persamaan *state* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned} \quad (1)$$

dengan:

$$\begin{aligned} a &= l^2 + \frac{J}{m_c + m_p} \\ \mu &= (m_c + m_p)l \end{aligned}$$

### III. OPTIMAL FUZZY TRACKING KONTROL

Kontroler *Fuzzy-Optimal* menggunakan kontroler *fuzzy* T-S dapat diilustrasikan dalam model *fuzzy* T-S yang memiliki aturan model *plant* yang dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

Aturan *plant* ke- $i$ :

$$\begin{aligned} \text{If } z_1(t) \text{ is } F_{i1} \text{ AND } \dots \text{ AND } z_j(t) \text{ is } F_{ij} \\ \text{Then } \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \\ i &= 1, 2, \dots, r \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

dengan  $r$  sebagai jumlah aturan *fuzzy*, dan  $p$  adalah jumlah himpunan *fuzzy* dalam satu aturan, dan  $F$  sebagai himpunan *fuzzy*, dengan vektor *state*  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ , vektor kontrol masukan  $u(t) \in R^m$ , dan vektor keluaran sistem  $y(t) \in R^q$ , sedangkan  $z(t) \in R^j$  merupakan variabel pada bagian premis.

Model *fuzzy* T-S secara keseluruhan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t)] \quad (2)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)] \quad (3)$$

dengan

$$w_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))}; \mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_{ij}(z_j(t)) \quad (4)$$

Pembobot  $w_i(z(t))$  dan derajat keanggotaan  $\mu_i(z(t))$  memiliki sifat sebagai berikut [5]:

$$w_i(z(t)) \geq 0; \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) = 1 \quad (5)$$

$$\mu_i(z(t)) \geq 0; \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) > 0 \quad (6)$$

Kontroler *state feedback* dapat disusun dengan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC). Dalam konsep PDC, tiap aturan kontroler dirancang berdasarkan aturan model *plant* linear yang bersesuaian dengan himpunan *fuzzy* yang sama. Untuk setiap aturan, gain kontroler dapat diperoleh dengan menggunakan teknik desain kontrol linear.

Dari aturan *plant* yang ada, dapat disusun aturan kontroler *fuzzy* dengan konsep PDC sebagai berikut [6].

Aturan kontroler ke- $i$  :

$$\begin{aligned} \text{If } z_1(t) \text{ is } F_{i1} \text{ AND } \dots \text{ AND } z_j(t) \text{ is } F_{ij} \\ \text{Then } u(t) &= -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) \\ i &= 1, 2, \dots, r \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Secara keseluruhan, keluaran dari kontroler *fuzzy* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [-\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)] \quad (7)$$

Maka, model *fuzzy* T-S dapat dituliskan menjadi sistem lup tertutup sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(z(t)) w_j(z(t)) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t)] \quad (8)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(z(t)) w_j(z(t)) [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)] \quad (9)$$

Dengan mengacu pada Persamaan (5) dan (6), maka model (8) dan (9) dapat disederhanakan menjadi persamaan (10) dan (11).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j)\mathbf{x}(t) \tag{10}$$

$$y(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t) \tag{11}$$

$i = 1,2, \dots, r \quad j = 1,2, \dots, p$

Nilai *state feedback*  $\mathbf{K}$  untuk masing-masing titik kerja didapatkan melalui teknik kontrol optimal. Untuk sebuah sistem linear yang dinyatakan dalam Persamaan (12)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{12}$$

dan sinyal referensi diberikan dalam model (13) [7],

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}\mathbf{z} \\ y_d &= \mathbf{H}\mathbf{z} \end{aligned} \tag{13}$$

Sinyal referensi yang akan diberikan adalah berupa penjumlahan antara sinyal step dan sinyal sinus dengan amplitudo 0,1 m dan frekuensi 0,1 Hz. Dalam bentuk persamaan matematis (14) berikut:

$$\mathbf{r}(t) = u(t) \tag{14}$$

Sedangkan bentuk persamaan matematis (23) sinyal sinus yaitu:

$$\mathbf{r}(t) = A \sin(2\pi ft) \tag{15}$$

Transformasi *Laplace* untuk sinyal step dan sinyal sinus adalah:

$$\mathcal{L}[u(s)] = \frac{1}{s} \tag{16}$$

dan

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{17}$$

Setelah memperoleh bentuk laplace dari sinyal tersebut maka akan didapat persamaan laplace sinyal referensi pada persamaan (18).

$$\mathcal{L}[\mathbf{r}(s)] = \frac{0,0628}{s^3 + 0,3948s} \tag{18}$$

dengan

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.3948 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = [1 \quad 0 \quad 0] \tag{19}$$

Pada model (13), persamaan sinyal referensi (18) dan (19) dengan representasi dalam ruang *state* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.3948 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

$$y_d = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \tag{20}$$

Sehingga bentuk *augmented* sistem seperti Persamaan (21) berikut:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}_i\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}_i u(t) \tag{21}$$

$i = 1,2, \dots, r$

dengan

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

*Error tracking* sistem dinyatakan sebagai berikut [6]:

$$\tilde{y} = y_d - y \tag{22}$$

Adapun indeks performansi kuadratik secara matematis dinyatakan sebagai [6]:

$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{y}^T(t)\mathbf{Q}\tilde{y}(t) + u^T(t)\mathbf{R}u(t)) dt \tag{23}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (21) ke (22), maka indeks performansi akan menjadi seperti berikut:

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{\mathbf{x}}^T(t)\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{x}}(t) + u^T(t)\bar{\mathbf{R}}u(t)) dt \tag{24}$$

dengan:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} & -\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{H} \\ -\mathbf{H}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} & \mathbf{H}^T\mathbf{Q}\mathbf{H} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

Solusi kontrol optimal pada dasarnya adalah mendapatkan nilai *gain*  $\mathbf{K}$  yang mampu meminimalkan indeks performansi (22). *Gain* tersebut didapatkan melalui perhitungan persamaan aljabar Riccati. Dari sistem Simulasi dan Implementasi Kontrol Tracking Fuzzy-Optimal untuk Sistem Pendulum-Kereta, model sistem disusun atas model *plant* sistem pendulum-kereta dan model referensi.

Model *plant* yang digunakan adalah model matematika nonlinear sistem pendulum-kereta pada Persamaan (1) yang dilinearisasi pada beberapa titik kerja. Titik kerja yang digunakan adalah  $x_2^*=0$  rad,  $x_2^*=\pm 0,3$  rad dan  $x_2^*=\pm 0,5$  rad.

Untuk titik kerja pertama:

$$\mathbf{x}^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ dan } u^* = 0$$

sehingga didapatkan:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1u(t) \tag{25}$$

dengan

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,25256 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,04211 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2369 \end{bmatrix}$$

Untuk titik kerja kedua:

$$\mathbf{x}^* = [0 \quad \pm 0,3 \quad 0 \quad 0]^T \text{ dan } u^* = 0$$

didapatkan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 u(t) \tag{26}$$

dengan

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2069 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,2737 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8254 \\ 1,1791 \end{bmatrix}$$

Untuk titik kerja ketiga:

$$\mathbf{x}^* = [0 \quad \pm 0,5 \quad 0 \quad 0]^T \text{ dan } u^* = 0$$

didapatkan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3 u(t) \tag{27}$$

dengan

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,1334 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 12,9686 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8224 \\ 1,0792 \end{bmatrix}$$

Matriks keluaran dan matriks transmisi langsung untuk titik kerja tersebut adalah:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_3 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{28}$$

Persamaan (24) hingga (26) merupakan model linear dari sistem pendulum-kereta di sekitar titik kerja  $x_2^*=0$  rad,  $x_2^*=\pm 0,3$  rad dan  $x_2^*=\pm 0,5$  rad. Dari hasil linearisasi Sistem Pendulum Kereta, dapat disusun model *fuzzy* T-S. Dengan melinearisasi pada tiga titik kerja, yaitu  $x_2^*=0$  rad,  $x_2^*=\pm 0,3$  rad dan  $x_2^*=\pm 0,5$  rad, maka model *fuzzy* T-S yang digunakan memiliki tiga aturan dengan satu variabel premis, yaitu sudut pendulum. Dengan menggunakan model linear pada (18) hingga (20), maka model *fuzzy* T-S dibentuk dengan aturan pada persamaan (30), (31) dan (32).

Aturan *plant* ke-1:

If  $x_2 = M_1$  (sekitar 0 rad)

Then  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}_1 u(t)$

$$y(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) \tag{29}$$

Aturan *plant* ke-2:

If  $x_2 = M_2$  (sekitar  $\pm 0,15$  rad)

Then  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 u(t)$

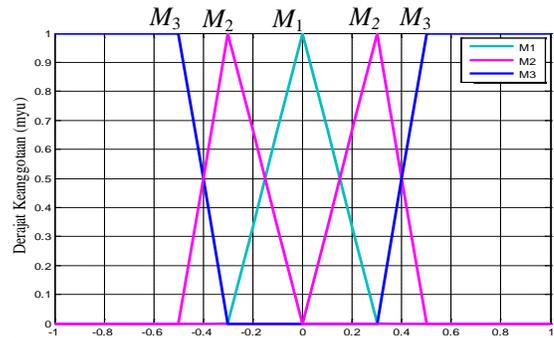
$$y(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) \tag{30}$$

Aturan *plant* ke-3:

If  $x_2 = M_3$  (sekitar  $\pm 0,3$  rad)

Then  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}_3 u(t)$

$$y(t) = \mathbf{C}_3 \mathbf{x}(t) \tag{31}$$



Gambar. 3. Fungsi keanggotaan  $M_1$ ,  $M_2$  dan  $M_3$ .

Dengan menggunakan konsep PDC, dapat disusun aturan kontroler *fuzzy* yang berseuaian dengan aturan *plant* menjadi sebagai berikut:

Aturan kontroler ke-1:

If  $x_2 = M_1$  (sekitar 0 rad)

Then  $u_1 = -\mathbf{K}_1 \bar{\mathbf{x}}(t)$  (32)

Aturan kontroler ke-2:

If  $x_2 = M_2$  (sekitar  $\pm 0,3$  rad)

Then

$u_2 = -\mathbf{K}_2 \bar{\mathbf{x}}(t)$  (33)

Aturan kontroler ke-3:

If  $x_2 = M_3$  (sekitar  $\pm 0,5$  rad)

Then  $u_3 = -\mathbf{K}_3 \bar{\mathbf{x}}(t)$  (34)

Fungsi keanggotaan  $M_1$ ,  $M_2$  dan  $M_3$  diperlihatkan pada Gambar 3. Dengan representasi persamaan *state* sistem yang telah didapatkan sebelumnya, matriks pembobot dipilih berbeda untuk setiap model linear. Matriks pembobot yang dipilih adalah sebagai berikut:

$$\bar{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{C} & -\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{H} \\ -\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{C} & \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{H} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \tag{35}$$

$i=1,2,3$

dengan

$$\mathbf{Q}_1 = 10000; \mathbf{Q}_2 = 15800; \mathbf{Q}_3 = 16900; \mathbf{R} = 1$$

Berdasarkan perhitungan yang dilakukan, diperoleh nilai *gain* Kalman, sebagai berikut :

$$\mathbf{K}_1 = [-100 \quad 237.8 \quad -67.85 \quad 61.9 \quad 100.0 \quad 65.41 \quad 22.38]$$

$$\mathbf{K}_2 = [-125 \quad 291.8 \quad -84.78 \quad 77.9 \quad 125.7 \quad 81.71 \quad 27.77]$$

$$\mathbf{K}_3 = [-128 \quad 317.3 \quad -89.83 \quad 88.6 \quad 128.8 \quad 86.34 \quad 30.34]$$

#### IV. PENGUJIAN DAN ANALISIS

Simulasi dan implementasi kontrol *tracking* pada sistem pendulum-kereta dikatakan baik apabila respon posisi kereta mampu mengikuti sinyal referensi yang diberikan serta tetap mempertahankan posisi sudut pendulum pada sudut 0 rad. Refrensi posisi kereta diberikan nilai sebesar 0,1meter dan kondisi awal sudut  $x_0$  sebesar 0,2 rad. Kondisi awal tersebut terletak pada blok integrator yang ada pada sinyal refrensi. Sinyal refrensi yang diberikan adalah sinyal step, *square-wave* dan sinyal sinus.

A. Simulasi

Berikut ini dilakukan simulasi pengujian dengan memberikan gangguan pada sistem. Gangguan diberikan pada sinyal kontrol dengan amplitudo  $\pm 17/5$  N. Hasil Respon sistem di tunjukkan pada Gambar 4, 5 dan 6. Simulasi dengan gangguan ini dilakukan untuk beberapa sinyal referensi yaitu, sinyal step, sinyal *square-wave* dan sinyal sinus. Gangguan yang diberikan pada sinyal step menyebabkan pergeseran selama 4 detik sebesar 0,04 dengan *undershoot* 0,05 meter dan *overshoot* sebesar 0,11 meter.

Begitu pula pada sinyal *square-wave*, gangguan juga mempengaruhi Respon posisi kereta, tetapi pergeseran yang dihasilkan Respon lebih kecil dibandingkan sinyal step. Pergeseran hasil Respon terjadi selama 2 detik sebesar 0,01 meter dengan *undershoot* -0,17 meter dan *overshoot* sebesar 0,17 meter. Sinyal sinus diberikan gangguan dengan sinyal 17/5 N maka, akan terjadi pergeseran selama 3,5 detik sebesar 0,3 meter dengan nilai *overshoot* pada saat 3 detik 0,09 meter.

Respon posisi juga menghasilkan *overshoot* pada saat detik ke-12 dengan 0,11 meter. Pada saat detik ke-12,2 terjadi *undershoot* sebesar 0,09 meter. Gangguan diberikan hanya dalam waktu 15 detik dalam sistem.

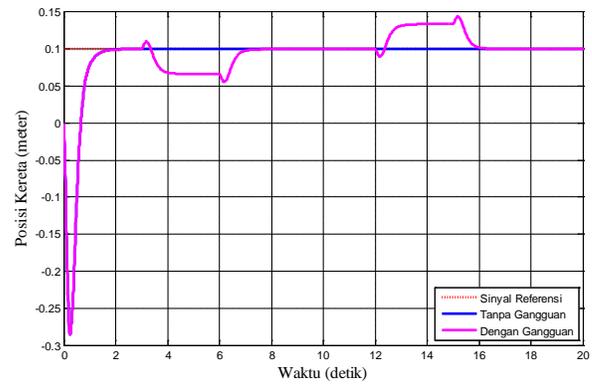
B. Implementasi

Implementasi berikut dilakukan dengan memberi gangguan pada sistem seperti yang telah dilakukan pada simulasi. Sistem dijalankan dengan memberikan gangguan pada amplitudo  $\pm 3$  N. Gangguan diberikan pada interval 3-6 detik dan 12-15 detik. Sinyal referensi yang diberikan yaitu sinyal step, sinyal *square-wave* dan sinyal sinus. Hasil Respon implementasi masing-masing akan dianalisa sesuai dengan tampilan grafik. Hasil Respon implementasi ditunjukkan pada Gambar 7, 8 dan 9.

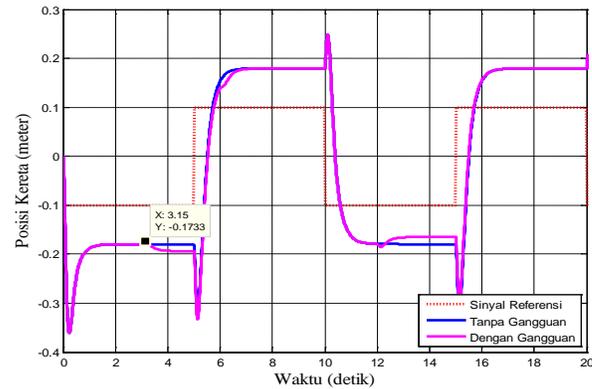
Respon posisi kereta yang dihasilkan pada sinyal step memiliki nilai *undershoot* pada -0,056 meter. Nilai *undershoot* yang dihasilkan pada implementasi tanpa gangguan lebih kecil dibandingkan implementasi dengan gangguan. Perbedaan nilai *undershoot* tersebut disebabkan karena pemberian kondisi awal pada implementasi dilakukan secara manual sehingga hasilnya tidak pasti. Osilasi yang dihasilkan pada implementasi di sinyal step sekitar 0,01 meter. Sedangkan pergeseran antara hasil implementasi dengan gangguan dan tanpa gangguan terdapat di 0,04 meter.

Sinyal referensi sinus juga diberikan gangguan pada implementasi yang dilakukan. Nilai *undershoot* yang dihasilkan pada saat ada gangguan yaitu -0,06 meter. Pergeseran yang dihasilkan akibat adanya gangguan sebesar 0,04 meter selama 3 detik. Pada detik ke-24 pergeseran terjadi sebesar 0,02 meter.

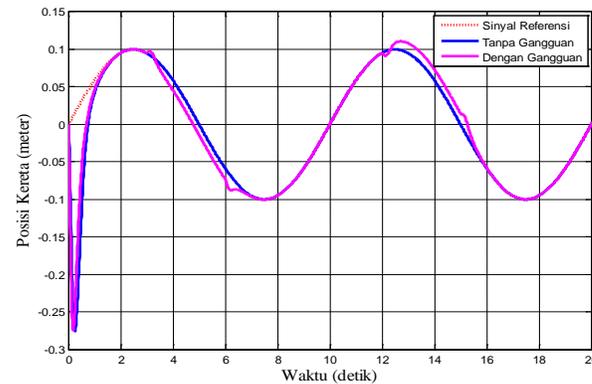
Pada saat implementasi *plant* secara nyata dapat dilihat posisi kereta mampu *track* sesuai sinyal referensi yaitu sinyal step, *square-wave* dan sinus yang diberikan, walaupun hasilnya tidak semulus seperti pada simulasi. Dengan nilai *Q* yang sama dengan berbagai kondisi awal dan referensi yang berbeda-beda ternyata respon posisi kereta pada implementasi dapat terlihat perbedaan yang cukup signifikan dibandingkan pada simulasi.



Gambar. 4. Hasil Respon Posisi Kereta Sinyal Step dengan Gangguan

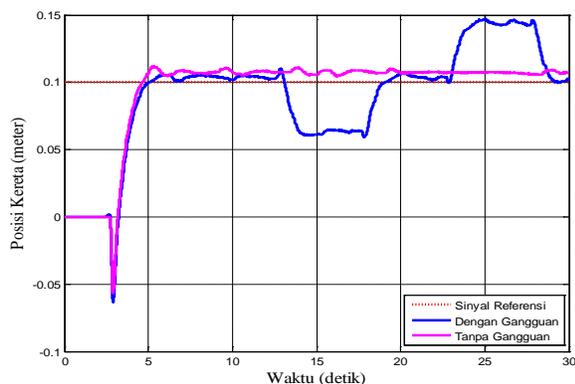


Gambar. 5. Hasil Respon Posisi Kereta Sinyal Square-wave dengan Gangguan.

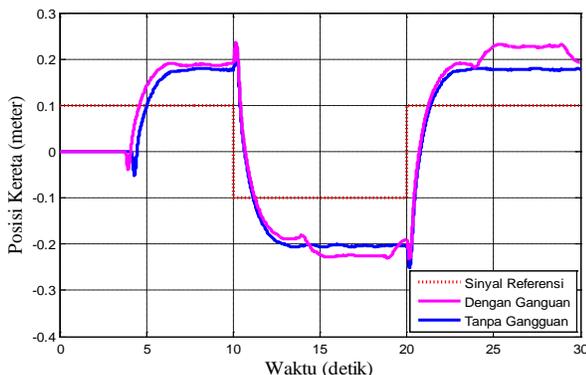


Gambar. 6. Hasil Respon Posisi Kereta Sinyal Sinus dengan Gangguan.

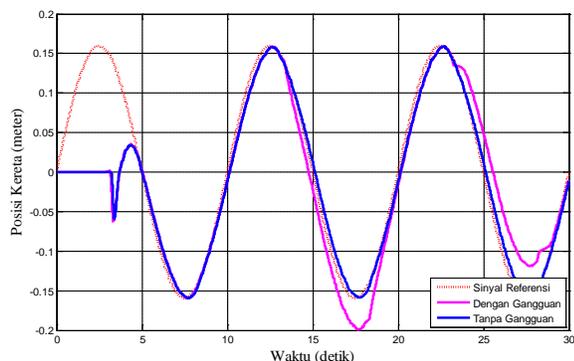
Sedangkan posisi sudut pendulum jauh berbeda dengan hasil simulasi berada disekitar sudut nol rad dengan osilasi yang kecil disekitar  $\pm 0,03$  rad atau sekitar  $\pm 0,17$  derajat. Hasil Respon nilai *undershoot* dan *overshoot* yang ada implementasi lebih kecil dibandingkan pada simulasi. Tetapi pada implementasi selalu terdapat osilasi, sedngkan pada simulasi tidak ada osilasi. Hal tersebut terjadi karena *plant* yang digunakan pada saat implementasi adalah *plant* nyata.



Gambar. 7. Hasil Implementasi Sinyal Step dengan Gangguan.



Gambar. 8. Hasil Implementasi Sinyal Square-wave dengan Gangguan.



Gambar. 9. Hasil Implementasi Sinyal Sinus dengan Gangguan.

Hasil implementasi dengan kontroler *fuzzy-optimal* mampu membuat posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi step maupun sinus yang diberikan dengan baik dan mulus, meskipun masih ada keterlambatan waktu antara sinyal referensi dan sinyal *output*-nya. Sedangkan posisi sudut pendulum juga mampu bertahan disekitar nol rad dengan osilasi yang lebih kecil. Implementasi menggunakan sinyal referensi *square-wave* diberikan sinyal gangguan sebesar  $\pm 3N$ . Hasil respon implementasi tersebut menunjukkan bahwa posisi kereta tidak dapat mendekati sinyal referensi yang diberikan. Sama halnya dengan simulasi sistem, pemilihan pembobot  $Q$  sangatlah mempengaruhi *output plant*, karena  $Q$  mempengaruhi nilai dari *gain feedback*  $K$ . Jadi perlu dicari nilai  $Q$  yang benar-benar dapat menghasilkan sinyal kontrol yang optimal sehingga *error* yang terjadi sekecil mungkin.

## V. KESIMPULAN

Setelah melakukan perancangan, simulasi dan implementasi tentang sistem kontrol untuk sistem pendulum-kereta menggunakan kontroler *Linear Quadratic Tracking* dengan *fuzzy* Takagi - Sugeno, maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Performansi sistem kontrol *Linear Quadratic Tracking* dipengaruhi oleh nilai pembobot matrik  $Q$  dan  $R$ . Nilai pembobot matrik  $Q$  dan  $R$  yang mendekati nilai yang diinginkan akan memberikan respon yang lebih baik.
2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa posisi kereta sudah *cukup* mampu mengikuti atau *men-track* sinyal referensi step dan sinus yang diberikan kecuali sinyal *square-wave*.
3. Posisi pendulum dengan sinyal referensi step dan sinus dapat tetap *mempertahankan* sudut pendulum di sekitar 0 rad dengan osilasi sebesar  $\pm 0,006$  rad sekitar ( $0,34^\circ$ ) dan posisi kereta pada implementasi dengan osilasi 0,0063 meter.
4. Hasil uji implementasi dan simulasi *linear Quadratic Tracking* menunjukkan bahwa semakin besar nilai  $Q$  yang diberikan maka semakin besar pula sinyal kontrol yang dihasilkan. Hasil Respon paling baik apabila menggunakan sinyal referensi sinus.
5. Struktur kontrol LQT menggunakan *fuzzy* optimal tidak cocok untuk sinyal referensi *square-wave* karena terdapat penyimpangan sangat jauh antara hasil respon dan referensi sebesar 0,0895 meter dan *overshoot* sudut  $\pm 0,01$  rad sekitar ( $0,57^\circ$ ).

Untuk perkembangan berikutnya, dapat diujikan menggunakan sinyal referensi *square-wave*, step dan sinus dengan kontroler lain sehingga mendapatkan hasil Respon yang baik.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Agustinah, T, Jazidie, A, Nuh, M, "Fuzzy Tracking Control Design Using Observer-based Stabilizing Compensator for Nonlinear Systems", *IEEE International Conference on System and Engineering*, pp. 275-280., 2010.
- [2] Slotine, J., Li, Weiping, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [3] Tanaka, K., Wang, Hua O., "Fuzzy Control System Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach", John Wiley & Sons, Inc., ISBNs: 0-471-32324-1 (Hardback); 0-471-22459-6 (Electronic), Ch.2, 2001.
- [4] Tiara F., "Kontrol Tracking pada Sistem Pendulum-Kereta Menggunakan Fuzzy-Integral Sliding Mode Control," Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2013.
- [5] Ogata K. , "Modern Control Engineering 3rd ed. ", Prentice-Hall, New Jersey, Ch. 3, 1997.
- [6] Naidu, Subbaram D, "Optimal Control Systems", CRC Press, Idaho, Ch.3-4, 2002.
- [7] Hutajulu, O. P. , "Performansi Tracking H-Inf Menggunakan Model Fuzzy Takagi-Sugeno pada Sistem Pendulum Terbalik", Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2010.
- [8] Pang, Hai-Ping and Yang, Qing, "Optimal Sliding Mode Output Tracking Control for Linear Systems with Uncertainties", *Proc. Of Ninth Int. Conf. on Machine Learning and Cybernetics IEEE*, pp. 942-946, ISBN 978-1-4244-6527-9, Qingdao, July, 2010.