

Studi Analitik dan Numerik Perpindahan Panas pada *Fin* Trapesium (Studi Kasus pada *Finned Tube Heat Exchanger*)

Ahmad Zaini dan Gunawan Nugroho

Jurusan Teknik Fisika, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111

E-mail: gunawan@ep.its.ac.id

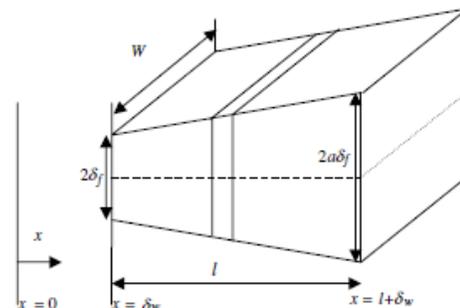
Abstrak—Penambahan *fin* pada pipa penukar kalor merupakan suatu upaya memperbesar perpindahan kalor konduksi dan konveksi, dengan cara memperluas bidang geometri. Pada penelitian ini dianalisa secara analitik dan numerik perpindahan kalor pada *fin* dengan profil longitudinal tidak seragam atau berubah terhadap jarak dari dasar *fin*, dengan memvariasikan ketebalan ujung *fin*. Hasil dari kedua studi ini tidak jauh berbeda, pada keduanya menjelaskan bahwa *fin* dengan ketebalan ujung 0,9 mm (*fin* trapesium terbalik) paling baik dari 5 variasi lainnya; serta perubahan temperatur paling besar terjadi pada sepertiga pertama dari panjang *fin*, ini artinya pelepasan kalor terbesar terjadi pada daerah tersebut. Perbedaannya adalah pada persentase penurunan temperatur sepanjang *fin* terhadap temperatur dasar *fin*, untuk ketebalan 0,9 mm pada studi analitik sebesar 91,92% dan pada studi numerik sebesar 91,78%. Hal ini berarti metode penyelesaian persamaan diferensial orde 2 dengan koefisien variabel dengan cara pembedahan koefisien variabel pada ODE, sudah benar dan valid. Namun bila ditinjau dari waktu yang diperlukan untuk komputasinya, studi analitik membutuhkan waktu lebih lama. Waktu yang diperlukan dalam komputasinya tergantung dari fungsi koefisien variabel.

Kata Kunci—analitik, *fin*, numerik, persamaan diferensial orde dua dengan koefisien variabel, trapesium.

I. PENDAHULUAN

BANYAK cara yang dapat dilakukan untuk mendinginkan komponen-komponen elektronika, salah satunya yaitu dengan menambahkan *heatsink*. Secara teknik, penambahan *heatsink* ini merupakan suatu upaya memperbesar perpindahan kalor konduksi dan konveksi, dengan cara memperluas bidang geometri [1]. Cara lain yang dapat juga dilakukan adalah dengan meningkatkan laju aliran udara yang dialirkan pada permukaan komponen. Dengan laju aliran udara yang lebih kencang tentu saja mempunyai kemampuan menyerap panas dari komponen-komponen elektronika dan membuangnya panas lebih besar.

Heatsink itu sendiri terdiri dari sirip-sirip (*fin*) yang disusun sedemikian rupa. Bentuk dan luas bidang geometri dari *fin* berbeda-beda tergantung dengan dimana komponen-komponen elemen penghantar panas diaplikasikan. Pada umumnya bentuk longitudinal *fin* yang digunakan adalah persegi panjang.



Gambar. 1. Skema dovetail-*fin* yang diteliti oleh [2].

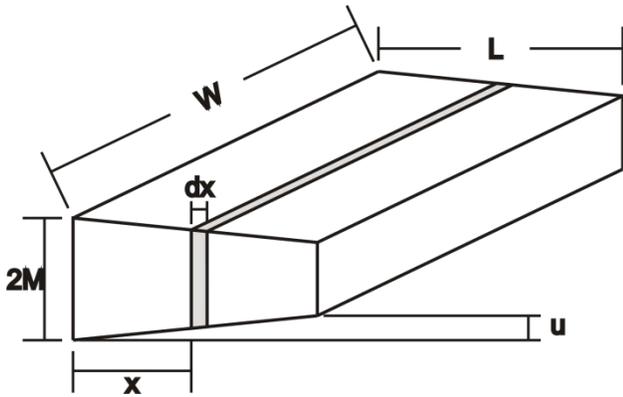
Banyak penelitian yang pernah dilakukan mengenai analisa numerik perpindahan panas pada *fin* dengan profil longitudinal tidak seragam atau berubah terhadap jarak dari dasar *fin*, misalnya saja yang dilakukan oleh [2] yang melakukan studi numerik pada *fin* dengan profil longitudinal bentuk dovetail atau trapesium terbalik. Hasil penelitian tersebut merekomendasikan bahwa *fin* dengan profil longitudinal dovetail lebih baik dari *fin* dengan profil longitudinal berbentuk persegi panjang. Hal ini karena panas yang melalui *fin* bentuk dovetail lebih besar daripada yang berbentuk persegi panjang [2]. Pada penelitian ini akan dianalisa perpindahan panas yang terjadi pada *fin* dengan profil longitudinal tidak seragam atau berubah terhadap jarak dari dasar *fin*. Salah satu geometri yang ketebalannya berubah terhadap jarak adalah trapesium. Oleh karena itu pada penelitian ini akan dilakukan studi secara analitik dan numerik perpindahan panas yang terjadi pada trapesium.

II. URAIAN PENELITIAN

Pada penelitian ini dilakukan studi secara analitik dan numerik perpindahan panas pada *fin* dengan melakukan variasi pada ketebalan ujung *fin*.

A. Studi Analitik

Tahap ini merupakan tahap penyelesaian persamaan model persamaan matematik secara manual untuk mendapatkan solusi analitik (eksak) dari persamaan konservasi energi pada *fin* dengan profil longitudinal trapesium. Gambar 2 adalah skema *fin* yang diteliti. Bisa dilihat bahwa penampang vertikal *fin* berubah sepanjang arah *x*, ini berarti *y* merupakan fungsi *x*. Perubahan ketebalan ini akan berpengaruh pada luasan tempat terjadinya perpindahan panas secara konduksi dan konveksi.



Gambar. 2. Skema *fin* trapesium.

$$y(x) = 2 \left[M + \frac{u}{L} x \right] \tag{1}$$

dan P adalah perimeter / keliling sepanjang dx,

$$P = 2[W + y(x)] \tag{2}$$

Sehingga luasan tempat terjadinya perpindahan panas secara konduksi (A_{CD}),

$$A_{CD} = y(x) \cdot W \tag{3}$$

dan konveksi (A_{CV}) adalah,

$$dA_{CV} = P \cdot dx \tag{4}$$

$$dA_{CV} = 2[W + y(x)] \cdot dx \tag{5}$$

$$\frac{dA_{CV}}{dx} = 2[W + y(x)] \tag{6}$$

Persamaan konservasi energi pada *fin* adalah sebagai berikut

$$\dot{E}_{st} = \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g \tag{7}$$

dengan asumsi perpindahan panas terjadi pada kondisi *steady state* ($\dot{E}_{st} = 0$); tidak ada pembangkitan energi ($\dot{E}_g = 0$); konstanta k dan h merata dan tetap; serta perpindahan panas berlangsung sepanjang arah x; maka persamaannya menjadi,

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \tag{8}$$

dengan melihat elemen dx maka,

$$\dot{q}_{CD,x} = \dot{q}_{CD,x+dx} + \dot{q}_{CV,x} \tag{9}$$

Dan secara umum persamaan konservasi energi pada *fin* dapat ditulis sebagai berikut,

$$\frac{d}{dx} \left(A_{CD} \frac{dT}{dx} \right) - \left(\frac{h}{k} \frac{dA_{CV}}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{CD}} \frac{dA_{CD}}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_{CD}} \frac{h}{k} \frac{dA_{CV}}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0 \tag{11}$$

dengan A_{CD} adalah luasan konduksi dan A_{CV} adalah luasan konveksi.

Dengan mensubstitusikan persamaan (1), (3), dan (6) ke persamaan (11), maka diperoleh

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \left[\frac{u}{M \cdot L + u \cdot x} \right] \frac{d\theta}{dx} - \left[\frac{1}{2W - (M + u/L \cdot x)} \frac{h}{k} 2(W + 2[M + u/L \cdot x]) \right] \theta = 0 \tag{12}$$

dengan $\theta = T - T_\infty$.

Persamaan di atas bisa ditulis menjadi,

$$\theta_{xx} + a_1 \cdot \theta_x + a_2 \cdot \theta = 0 \tag{13}$$

dengan,

$$a_1 = \left[\frac{u}{M \cdot L + u \cdot x} \right] \tag{14}$$

dan

$$a_2 = - \left[\frac{1}{2W - (M + u/L \cdot x)} \frac{h}{k} 2(W + 2[M + u/L \cdot x]) \right] \tag{15}$$

Dari persamaan diferensial dengan koefisien variabel dengan bentuk seperti pada persamaan (13), koefisien a_1 dan a_2 dipecah menjadi beberapa fungsi baru $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ dan α . Dengan menyelesaikan beberapa fungsi tersebut maka diperoleh,

$$\theta = \left[\left(\int a_2 dx \right) f_3 f_6 \right]^{-1} \left[C_9 \int \left(f_3^2 f_6^2 \left(\int a_2 dx \right)^{-2} e^{-\int a_1 dx} \right) dx + C_{10} \right] \tag{16}$$

dengan f_3 dan f_6 ,

$$f_3 = \left(C_{11} \int e^{\int (a_3 - a_4) dx} dx + C_{12} \right)^{-1} \tag{17}$$

$$f_6 = \left(C_2 \int \frac{1}{f_4} dx + C_3 \right)^{-1} \tag{18}$$

Untuk definisi dari f_4 adalah sebagai berikut,

$$f_4 = -2 \frac{1}{f_2} \left(\int f_2 dx + C_5 \right)^{-1} \tag{19}$$

dengan,

$$f_2 = \left[\left(C_7 \int f_3^{-2} e^{\int a_3 dx} dx + C_8 \right)^{\frac{1}{2}} \right]_x \tag{20}$$

Sementara untuk definisi α , a_3 dan a_4 adalah,

$$\alpha = C_1 e^{\int (a_1 - \int a_2 dx) dx} \tag{21}$$

$$a_3 = \left(a_1 - \frac{\alpha_x}{\alpha} \right) \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\alpha \left(a_1 - \frac{\alpha_x}{\alpha} \right)^{-1} \right]_x + \left[\left(a_1 - \frac{\alpha_x}{\alpha} \right)^{-1} \right]_x + 1 \right\} \tag{22}$$

$$a_4 = \frac{1}{\alpha} \left(a_1 - \frac{\alpha_x}{\alpha} \right) \left\{ \alpha \left[\left(a_1 - \frac{\alpha_x}{\alpha} \right)^{-1} \right]_x \right\} \tag{23}$$

Fungsi θ merupakan fungsi temperatur pada *fin* (T) dikurangi dengan temperatur ambien (T_∞), maka untuk persamaan yang menyatakan fungsi temperatur sepanjang *fin* adalah,

$$T = \theta + T_{\infty} \tag{24}$$

Beberapa bentuk integral pada solusi di atas ada yang bersifat implisit, jadi tidak bisa langsung di-integral-kan. Dan biasanya dinyatakan dalam bentuk deret, sehingga solusinya tidak lagi eksak. Untuk mengatasi permasalahan ini, maka dalam penyelesaian integral yang masih implisit menggunakan metode “Integral Evaluation” [3]. Untuk mempermudah proses perhitungan maka dibuat program komputasi simbolik.

Dan untuk penyelesaian persamaan diferensial orde 2 dengan koefisien variabel secara keseluruhan, juga dibuat program komputasi simbolik pada *Octave*, yakni *opensource* mirip MATLAB.

B. Studi Numerik

Tahap ini merupakan tahap untuk menganalisa perpindahan panas yang terjadi pada *fin* dengan profil longitudinal trapesium melalui simulasi pada CFD.

Data dimensi *fin* yang akan diuji secara numerik didapat dari penelitian yang dilakukan oleh [4].

Tabel 1 adalah data yang nantinya akan digunakan dalam simulasi.

Namun secara umum, untuk tahap pengujian pada CFD terbagi menjadi 3 sub-tahap, yaitu

- (i) *Pre-Processing*
Tahap ini meliputi tahap pembuatan model geometri; pendefinisian variabel fisis material; diskritisasi model geometri; sampai pendefinisian kondisi batas dan proses yang terjadi pada model.
- (ii) *Solution*
Pada tahap ini ditentukan variabel apa saja yang ingin diamati pada *fin*. Setelah itu *solver* akan melakukan perhitungan atau penyelesaian masalah dengan iterasi tertentu. Jika hasilnya tidak konvergen maka kembali ke proses (i).
- (iii) *Post Processing*
Tahap terakhir merupakan tahap visualisasi dari hasil (“Result”) simulasi yang telah dilakukan. Hasil dari tahap ini nantinya akan dianalisa pada tahap.

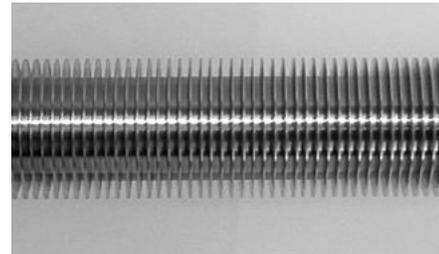
III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Studi Analitik

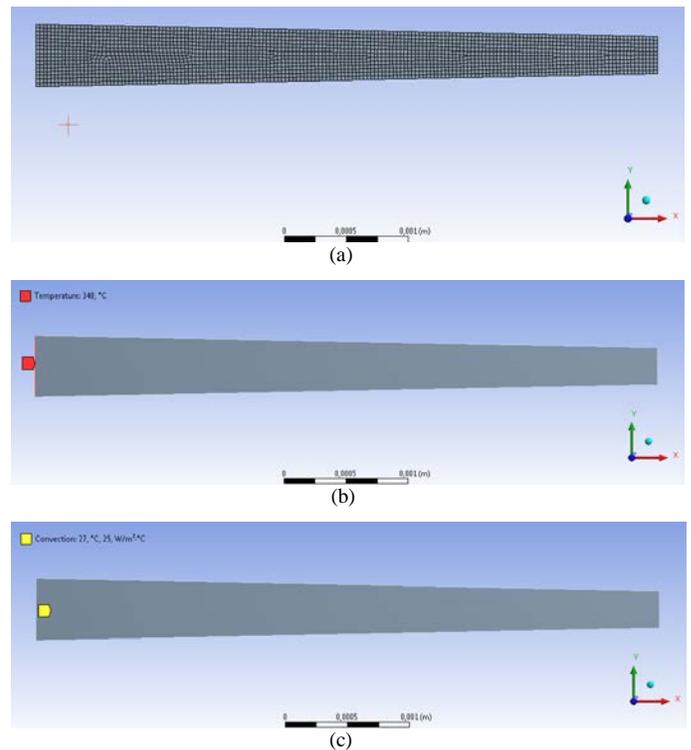
Metode “Integral Evaluation” [3] merupakan metode untuk mengevaluasi integral fungsi yang implisit dalam bentuk $\int \lambda e^{\int f dx}$, dengan λ dan f merupakan fungsi x . Sebagai validasi, maka dilakukan pengujian terhadap metode “Integral Evaluation”. Fungsi yang akan diuji adalah $y(x) = e^x$. Dan jika dinyatakan dalam bentuk $\int \lambda e^{\int f dx}$, maka nilai dari $\lambda=1$ dan $f=1$. Gambar 5 merupakan perbandingan hasil integral biasa dengan hasil integral menggunakan metode “Integral Evaluation” Dari gambar bisa dilihat bahwa ada sedikit perbedaan (*error*) saat $x=0$, selanjutnya berangsur-angsur berkurang sampai akhirnya kedua garis berimpit saat $x>2$.

Tabel 1.
Data karakteristik *fin* yang akan disimulasikan [4]

Keterangan	Nilai
Panjang <i>fin</i>	5 mm
Ketebalan <i>fin</i>	0,5 mm
Jenis Bahan	Stainless Steel
Konduktivitas termal bahan (k)	16 W/(m.K)
Koefisien perpindahan kalor konveksi (h)	25 W/(m ² .K)
Temperatur dasar <i>fin</i>	340 °C
Temperatur ambien	27 °C



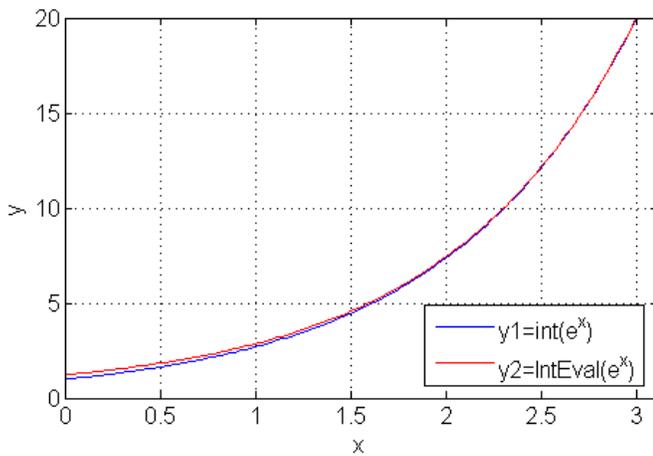
Gambar. 3. Skema NC-machined finned tube [4].



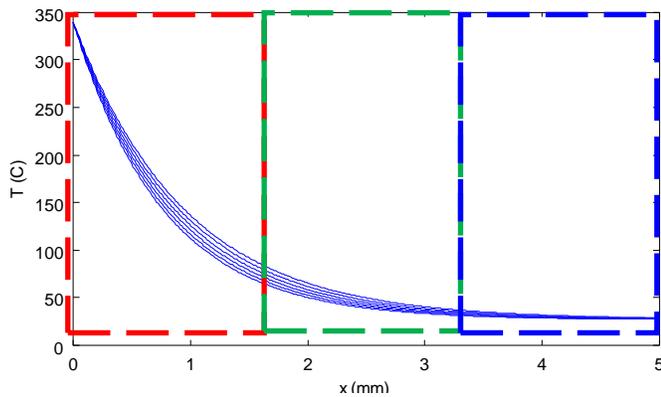
Gambar. 4. Tahap *Pre-Processing* (a) Diskritisasi (b) Pendefinisian sisi kiri *fin* sebagai sumber panas (c) Pendefinisian proses konveksi pada *fin* trapesium.

Untuk menguji fungsi lain, maka fungsi tersebut harus diubah dan dinyatakan dalam bentuk, $\int \lambda e^{\int f dx}$. Jadi untuk mengevaluasi integral $\int b dx$, bisa dinyatakan dalam bentuk

$$\int 1. e^{\int \frac{b}{b} dx} dx, \text{ dengan } \lambda = 1 \text{ dan } f = \frac{b}{b}.$$



Gambar 5. Pengujian Integral Evaluation pada $f(x) = e^x$



Gambar 6 Grafik $\theta(x)$ untuk variasi ketebalan ujung 0,9 mm ($u = 0,2$ mm)

Tabel 2.

Perbandingan penurunan temperatur pada *fin* dari hasil studi analitik

Ketebalan ujung <i>fin</i> (mm)	dT (°C)	dT/T _b
0	311,36	91,58%
0,1	311,72	91,68%
0,3	312,00	91,77%
0,5	312,22	91,83%
0,7	312,40	91,88%
0,9	312,53	91,92%

Gambar 6 merupakan grafik yang menggambarkan $T(x)$ untuk semua variasi ketebalan ujung *fin*. Berturut-turut mulai dari garis yang paling atas sampai ke bawah merupakan garis untuk variasi 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7 sampai 0,9 mm.

Dari Tabel 2 terlihat bahwa penurunan temperatur paling besar terjadi *fin* dengan ketebalan ujung 0,9 mm, yaitu sebesar 312,53°C atau 91,92% dari temperatur dasar *fin*.

Bila ditinjau dari pembagian daerah sepanjang *fin*, bisa dilihat pada Tabel 3. Dari Tabel 3 terlihat bahwa daerah sepertiga pertama dari panjang *fin* untuk ketebalan 0,9 mm penurunan temperaturnya paling besar yaitu sebesar 82,38% dari temperatur dasar *fin*. Hal ini juga berlaku pada semua variasi.

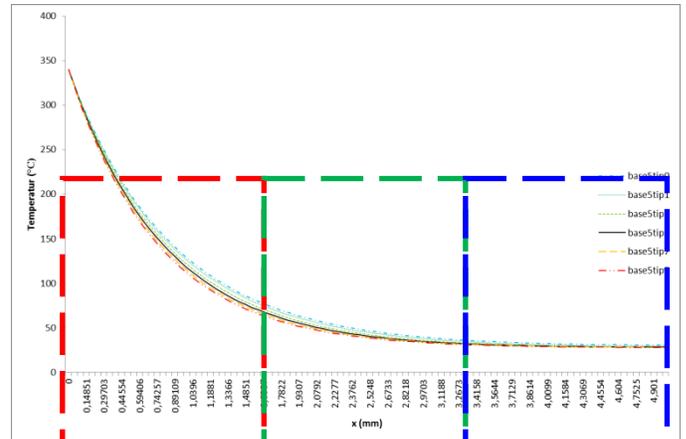
B. Hasil Studi Numerik

Setelah dilakukan pengujian pada model *fin* dengan variasi ketebalan ujung, berikut ini adalah gambaran tentang gradien temperatur pada *fin*.

Tabel 3.

Perbandingan persentase penurunan temperatur sepanjang *fin* dari hasil studi analitik, dT/dT_b (%)

Daerah	Ketebalan ujung <i>fin</i> (mm)					
	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
Sepertiga Pertama	77,13%	78,37%	79,51%	80,55%	81,50%	82,38%
Sepertiga Kedua	12,51%	11,65%	10,84%	10,07%	9,34%	8,68%
Sepertiga Ketiga	1,94%	1,66%	1,42%	1,21%	1,03%	0,86%
Keseluruhan	91,58%	91,68%	91,77%	91,83%	91,88%	91,92%



Gambar 7 Perbandingan gradien temperatur pada *fin* dengan variasi ketebalan ujung

Tabel 4.

Perbandingan penurunan temperatur pada *fin* dari hasil studi numerik

Ketebalan ujung <i>fin</i> (mm)	dT (°C)	dT/T _b
0	309,29	90,97%
0,1	310,80	91,41%
0,3	311,51	91,62%
0,5	311,79	91,70%
0,7	311,95	91,75%
0,9	312,06	91,78%

Untuk perbandingan penurunan temperatur pada tiap variasi bisa dilihat pada Tabel 4.

Dari Tabel 4 terlihat bahwa penurunan temperatur paling besar terjadi *fin* dengan ketebalan ujung 0,9 mm, yaitu sebesar 312,06°C atau 91,78% dari temperatur dasar *fin*.

Dan bila ditinjau dari daerahnya bisa dilihat pada Tabel 5, daerah sepertiga pertama dari panjang *fin* merupakan daerah dengan gradien temperatur terbesar bila dibandingkan dengan daerah sepertiga kedua dan ketiga, yaitu 82,66% dari temperatur dasar *fin*. Ini artinya perpindahan kalor paling besar terjadi pada daerah sepertiga pertama.

C. Pembahasan

Pada penelitian ini dilakukan studi secara analitik dan numerik perpindahan panas pada *fin* dengan ketebalan yang berubah terhadap jarak. Variasi yang dilakukan adalah dengan mengubah ketebalan ujung *fin* mulai dari 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7 sampai 0,9 mm.

Tabel 5.

Perbandingan persentase penurunan temperatur sepanjang *fin* dari hasil studi numerik, dT/dT_b (%)

Daerah	Ketebalan ujung <i>fin</i> (mm)					
	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
Sepertiga Pertama	78,84%	79,57%	80,68%	81,50%	82,14%	82,66%
Sepertiga Kedua	10,87%	10,61%	9,93%	9,32%	8,82%	8,39%
Sepertiga Ketiga	1,25%	1,23%	1,02%	0,88%	0,79%	0,73%
Keseluruhan	90,97%	91,41%	91,62%	91,70%	91,75%	91,78%

Tabel 6.

Perbandingan hasil studi analitik dan numerik dari segi persentase penurunan temperatur, dT/T_b (%)

Ketebalan ujung <i>fin</i> (mm)	Hasil Studi Analitik	Hasil Studi Numerik	Perbedaan Kedua Studi (%)
0	91,58%	90,97%	0,61%
0,1	91,68%	91,41%	0,27%
0,3	91,77%	91,62%	0,15%
0,5	91,83%	91,70%	0,13%
0,7	91,88%	91,75%	0,13%
0,9	91,92%	91,78%	0,14%

Untuk studi analitik diperoleh metode penyelesaian untuk mendapatkan solusi eksak dari persamaan diferensial dengan koefisien variabel. Namun dalam komputasinya (simbolik) membutuhkan waktu yang cukup lama. Pada solusi eksak yang dihasilkan ada beberapa bentuk integral yang implisit. Metode “Integral Evaluation” [3] merupakan metode untuk penyelesaian integral yang implisit. Pada penelitian ini sudah dilakukan pengujian terhadap metode tersebut untuk mengintegral fungsi e^x dan hasilnya hampir sama dengan integral biasa.

Dari Gambar 6 dan Gambar 7, terlihat bahwa perubahan temperatur yang sangat signifikan terjadi pada daerah yang ditandai dengan warna merah, yaitu sepertiga pertama dari panjang *fin*. Selanjutnya pada daerah hijau masih terjadi perubahan temperatur namun gradiennya (dT/dx) tidak sebesar pada daerah merah. Dan yang terakhir pada daerah biru perubahan temperaturnya kecil sekali.

Dari kedua studi terlihat bahwa bentuk *fin* dengan ketebalan ujung 0,9 mm lebih baik dari 5 variasi yang lain. Hal ini karena semakin besar ketebalan ujung maka akan memperbesar luasan untuk terjadinya perpindahan kalor baik secara konduksi maupun secara konveksi.

Distribusi temperatur sepanjang *fin* mempengaruhi kalor yang dibuang ke lingkungan secara konveksi. Jika meninjau suatu titik x pada *fin*, semakin besar perbedaan antara temperatur pada titik x dengan temperatur ambien, maka kalor yang dibuang secara konveksi juga semakin besar. Jika melihat gradien temperatur pada *fin* dengan ketebalan 0,9 mm, berarti pelepasan kalor ke lingkungan secara konveksi paling besar berada pada daerah sepertiga pertama dari panjang *fin*, yaitu sebesar 82,66% dari keseluruhan panas yang dibuang secara konveksi. Artinya kalor yang dibuang secara konveksi berbanding lurus dengan besarnya perpindahan kalor secara

konduksi sepanjang *fin*.

Penurunan temperatur yang signifikan pada daerah sepertiga pertama ini merupakan efek berantai dari pelepasan kalor ke lingkungan secara konveksi pada tiap titik x sepanjang *fin*. Pada $x=0$ (dasar *fin*) perbedaan temperatur antara permukaan *fin* dengan ambien sangat tinggi, sehingga kalor yang dilepas secara konveksi sangat besar. Akibatnya penurunan temperatur dari titik x ke titik $x+dx$ sangat besar. Proses yang sama terjadi pada titik $x+2dx$, $x+3dx$, dan seterusnya sampai $x=L$. Perpindahan kalor dari suatu titik ke titik yang lain terjadi karena adanya perbedaan temperatur, jadi jika perbedaan temperatur antara permukaan *fin* dengan ambien sangat kecil (pada daerah sepertiga ketiga) maka kalor yang dilepas juga sangat kecil. Proses pelepasan kalor secara konveksi ini berhenti sampai temperatur antara permukaan *fin* dengan ambien sama.

Tabel 3 merupakan perbandingan ketua studi ditinjau dari persentase penurunan temperatur terhadap temperatur dasar *fin*. Hasil dari kedua studi ini tidak jauh berbeda, pada keduanya terlihat perubahan temperatur paling besar terjadi pada sepertiga pertama dari panjang *fin*. Bedanya adalah pada persentase perubahan temperatur sepanjang *fin* terhadap temperatur dasar *fin*, misalnya pada *fin* dengan ketebalan 0,9 mm untuk studi analitik sebesar 91,92% dan untuk studi numerik sebesar 91,78%. Hal ini berarti metode penyelesaian persamaan diferensial orde 2 dengan koefisien variabel dengan cara pembedahan koefisien variabel pada ODE, sudah benar dan valid. Namun bila ditinjau dari waktu yang diperlukan untuk komputasinya, studi numerik lebih baik daripada studi analitik yang melakukan komputasi dalam waktu yang cukup lama. Waktu yang diperlukan dalam komputasinya tergantung dari fungsi koefisien variabel (a_1 dan a_2).

IV. KESIMPULAN

Dari penelitian Tugas Akhir tentang “Studi Analitik dan Numerik Perpindahan Panas pada *Fin* Trapesium (Studi Kasus Pada *Finned Tube Heat Exchanger*)” yang telah dilakukan dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut,

- 1) Untuk studi analitik dapat disimpulkan,
 - a. Diperoleh metode untuk mendapatkan solusi eksak dari persamaan diferensial orde dua dengan koefisien variabel. Yaitu dengan cara membedah koefisien variabelnya menjadi beberapa fungsi baru, dengan menyelesaikan beberapa fungsi tersebut maka diperoleh solusi eksaknya. Bentuk persamaan konservasi energi pada *fin* trapesium berupa persamaan diferensial orde dua dengan koefisien variabel. Jadi persamaan dengan bentuk,

$$\theta_{xx} + a_1 \cdot \theta_x + a_2 \cdot \theta = 0$$

dengan a_1 dan a_2 merupakan fungsi x , dapat ditentukan solusi eksaknya dengan cara membedah a_1 dan a_2 menjadi $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ dan a . Dengan menyelesaikan beberapa fungsi tersebut maka diperoleh solusi eksak sebagai berikut,

$$\theta = \left[\left(\int a_2 dx \right) f_3 f_6 \right]^{-1} \left[C_9 \int \left(f_3^2 f_6^2 \left(\int a_2 dx \right)^{-2} e^{-\int a_1 dx} \right) dx + C_{10} \right]$$

- b. *Fin* dengan ketebalan ujung 0,9 mm paling baik karena penurunan temperaturnya paling besar, yaitu 91,92% dari temperatur dasar *fin*.
- 2) Dari hasil studi numerik dapat diambil kesimpulan bahwa, *fin* dengan ketebalan ujung 0,9 mm paling baik dari 5 variasi lainnya, dengan penurunan temperatur 91,78% dari temperatur dasar *fin*. Hal ini karena semakin besar perbedaan ketebalan antara ujung dengan dasar *fin*, maka perpindahan kalor konduksi dan konveksi semakin besar.
 - 3) Hasil dari kedua studi ini tidak jauh berbeda, pada keduanya menjelaskan bahwa *fin* dengan ketebalan ujung 0,9 mm (*fin* trapesium terbalik) paling baik dari 5 variasi lainnya; serta perubahan temperatur paling besar terjadi pada sepertiga pertama dari panjang *fin*, ini artinya pelepasan kalor terbesar terjadi pada daerah tersebut. Perbedaannya adalah pada persentase penurunan temperatur sepanjang *fin* terhadap temperatur dasar *fin*, untuk ketebalan 0,9 mm pada studi analitik sebesar 91,92% dan pada studi numerik sebesar 91,78%. Hal ini berarti metode penyelesaian persamaan diferensial orde 2 dengan koefisien variabel dengan cara pembedahan koefisien variabel pada ODE, sudah benar dan valid. Namun bila ditinjau dari waktu yang diperlukan untuk komputasinya, studi analitik membutuhkan waktu lebih lama dari pada studi numerik. Waktu yang diperlukan dalam komputasinya tergantung dari fungsi koefisien variabelnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Incropera, F.P & De Witt D. 1996. "Fundamentals of Heat and Mass Transfer (Fourth Edition)". John Wiley & Sons
- [2] Lane H.J. & Heggs P.J. 2005. "Extended surface heat transfer-the dovetail fin". *Applied Thermal Engineering*, 25:2555-2565
- [3] Nugroho, G. 2013. "Application of First Order Polynomial Differential Equation for Generating Analytical Solutions to the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations". *European Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 2, No. 1: 17-40.
- [4] Wiplinger K.P.M, Harms T.M; & Taylor A.B. 2006. "Stainless steel finned tube heat exchanger design for waste heat recovery". *Journal of Energy in Southern Africa*, Vol 17, No 2 : 47-56.